



# Interférométrie atomique avec un condensat de Bose-Einstein : effet des interactions internes

Raphaël Jannin

## ► To cite this version:

Raphaël Jannin. Interférométrie atomique avec un condensat de Bose-Einstein : effet des interactions internes. Physique Quantique [quant-ph]. UPMC Université Paris VI, 2015. Français. NNT : . tel-01228788

**HAL Id: tel-01228788**

**<https://theses.hal.science/tel-01228788>**

Submitted on 13 Nov 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité : Physique

École doctorale : « Physique en Île-de-France »

réalisée

au Laboratoire Kastler Brossel

présentée par

Raphaël JANNIN

pour obtenir le grade de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Sujet de la thèse :

**Interférométrie atomique avec un condensat  
de Bose-Einstein : effet des interactions internes**

soutenue le 8 octobre 2015

devant le jury composé de :

|     |                         |                     |
|-----|-------------------------|---------------------|
| Mme | Marie-Christine ANGONIN | Présidente du jury  |
| M.  | Matthias BÜCHNER        | Examineur           |
| M.  | Pierre CLADÉ            | Membre invité       |
| M.  | Jean-Claude GARREAU     | Rapporteur          |
| Mme | Saïda GUELLATI-KHÉLIFA  | Directrice de thèse |
| Mme | Hélène PERRIN           | Rapporteur          |



# Remerciements

*J'ai effectué le travail présenté dans ce manuscrit au Laboratoire Kastler Brossel d'octobre 2012 à septembre 2015. Je tiens tout d'abord à remercier ses directeurs successifs, Paul Indelicato et Antoine Heidmann, de m'y avoir accueilli et offert d'excellentes conditions de travail.*

*Je souhaiterais tout d'abord remercier Hélène Perrin et Jean-Claude Garreau d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail de thèse, de l'intérêt qu'ils y ont porté et de leurs remarques constructives. Je remercie également Matthias Büchner d'avoir accepté d'être membre de mon jury, et Marie-Christine Angonin d'avoir accepté de le présider, ainsi que pour leur sympathie.*

*Mes remerciements vont ensuite aux membres de l'équipe 13, avec lesquels j'ai travaillé au cours de ces trois années. Je voudrais tout d'abord remercier ma directrice de thèse, Saïda Guellati-Khélifa, pour sa grande disponibilité et sa bienveillance constante. De mes premiers couplages dans des fibres optiques jusqu'à l'assemblage de l'enceinte à vide, en passant par l'alignement des diodes lasers, j'ai beaucoup appris à ton contact. Ton enthousiasme et ta grande patience rendent agréables même les tâches les plus ingrates !*

*Je remercie également Pierre Cladé, qui a lui aussi encadré quotidiennement mon travail de thèse. Son esprit vif et ses remarques toujours pertinentes m'ont permis à de nombreuses reprises de contourner les difficultés qui se présentaient. De plus, sa présence quotidienne sur l'expérience, ses nombreuses explications, ainsi que sa grande connaissance du langage Python m'ont guidé au cours de ces trois ans.*

*De plus, je tiens tous deux à vous remercier pour m'avoir fait confiance et m'avoir laissé beaucoup d'autonomie, aussi bien sur l'expérience que sur les simulations et le modèle. Votre encadrement a été très agréable et épanouissant et m'a permis d'évoluer positivement au cours de ces trois ans.*

*Je souhaiterais aussi remercier François Biraben, le « chef » de l'équipe 13, pour m'y avoir accueilli. L'étendue de son savoir est impressionnante, et ses qualités humaines remarquables. Je remercie les membres de l'équipe « hydrogène », Lucile Julien et François Nez. Les discussions à la cafétéria à l'heure du thé, autour de chocolats suisses, ont toujours été très enrichissantes, et m'ont donné un autre regard sur l'expérience. Je tiens à vous remercier pour votre grande gentillesse et vos conseils, tant sur le manuscrit que pour la recherche de post-doc. Enfin, je tiens à souligner que l'ambiance familiale qui règne dans l'équipe a rendu ces trois ans extrêmement agréables. Je remercie également Gilles Bailly, qui a passé un an en notre compagnie, pour sa sympathie et sa bonne humeur.*

*Je tiens de plus à remercier Astrid Lambrecht pour m'avoir permis d'effectuer mon stage de Master dans son équipe, qui a confirmé mon désir d'effectuer une thèse, et d'avoir accepté d'être ma marraine au cours de ces trois ans. Son écoute attentive ainsi que son soutien m'ont beaucoup épaulé au cours de ma thèse.*

*J'en viens maintenant aux autres doctorants de l'équipe, avec lesquels j'ai passé le plus clair de mon temps durant les trois dernières années. Merci aux deux collègues et amis de l'expérience h/m. Merci à Manuel Andia, ami depuis le Master et avec lequel nous avons découvert le laboratoire en 2012, et à Clément Courvoisier, qui est arrivé un an après et avec qui nous avons partagé les difficultés sur la nouvelle expérience. Ces années passées avec vous ont été très agréables et les vendredi matins en salle de manip ont toujours été « ungläublich » ! Je leur souhaite à tous deux bonne chance pour la suite, Manuel pour son post-doc et Clément pour l'obtention du condensat (t'as intérêt à m'envoyer un sms quand tu l'auras obtenu !). Merci à Sandrine Galtier, ancienne doctorante de l'équipe « hydrogène », pour ta bonne humeur et les soirées pizza que nous avons partagées, même au labo, parce que nous devons surveiller le collage des hublots du 2D-MOT ! Je souhaite à Hélène Fleurbaey, qui succède à Sandrine dans l'équipe, d'avoir autant de plaisir que j'en ai eu au cours de ces trois ans.*

*Je remercie les différents stagiaires de l'équipe qui ont contribué à l'expérience, et à la bonne humeur qui régnait en salle de manip : Rémi Metzdorff et Etienne Wodey. Je leur souhaite bonne chance à tous les deux pour leurs thèses.*

*Je tiens à remercier les précédents doctorants de l'équipe, Rémy Battesti, Pierre Cladé, Malo Cadoret et Rym Bouchendira, pour leurs manuscrits qui ont été d'importantes sources d'informations.*

*Je remercie les autres doctorants du labo qui, tous, contribuent à la bonne*

*ambiance qui y règne. Plus particulièrement, je remercie Salim Zerkani, ami avec lequel nous avons traversé depuis les premières années, jusqu'à la thèse, en passant par le Master. Je te souhaite bon courage dans la rédaction de ton manuscrit, et je n'oublierai pas nos différentes « expéditions » en janvier et juillet dans Paris en sortant du labo ! C'était un plaisir de partager les pauses avec toi en bas de la tour 12 ! Je remercie aussi Johannes Heinrich, avec qui je partage mon bureau depuis un an et avec qui nous avons passé de très bons moments. Merci à Leonhard Neuhaus, ces années de thèse passées en ta compagnie furent très sympa, et je te remercie de m'avoir fait profiter de ton « trafic » de cigarettes entre le Portugal et la France !*

*Je souhaiterais aussi remercier ceux sans qui ce travail de thèse n'aurait pas pu être réalisé. Je tiens tout d'abord à remercier les membres de l'atelier mécanique, qui ont réalisé l'ensemble de l'enceinte à vide de l'expérience, et qui ont su se montrer patients lorsque nous arrivions avec de nouvelles pièces à réaliser : Jean-Michel Isac, Pascal Travers, Arnaud Leclercq, Gaël Coupin, Carounagarane Doré, Thierry Bastien et Sébastien Colinot, arrivé depuis peu. Merci pour votre disponibilité et votre bonne humeur. Je tiens aussi à remercier Brigitte Delamour, Jean-Pierre Okpiz, Mohammed Boujrad et Loïc Garcia de l'atelier d'électronique, pour leur aide dans la conception et le développement des circuits électroniques, ainsi que pour l'ensemble de ce qu'ils ont réalisé pour l'expérience. Je remercie de plus Florence Thibout, qui tient à elle seule l'atelier de verrerie et sans qui nous n'aurions pas de rubidium pour nos expériences ! Merci aux membres du service informatique : Serge Begon, Corinne Poisson, Mathilde Rousseau et Jérémie Saen. Merci encore aux membres du secrétariat, qui m'ont facilité les procédures administratives et les commandes : Laetitia Morel, Michel Leite-Ferreira, Thierry Tardieu et Romain Rybka, sans oublier Monique Grannon ainsi que Nora Aissous qui lui succède. Enfin, je remercie vivement Annick Lamarck et Bintou Maiga pour nous permettre de travailler dans d'excellentes conditions.*

*Je tiens enfin à remercier tous mes proches et amis, sans qui ces trois ans auraient été bien fades. Mes derniers remerciements vont à mes parents pour leur soutien au cours de ces années.*



# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduction</b>   | <b>1</b>  |
| <b>1 Interférométrie atomique avec un condensat de Bose-Einstein : enjeux et défis</b>      | <b>5</b>  |
| 1.1 Interférométrie atomique . . . . .  | 6         |
| 1.1.1 Principe de l'interférométrie atomique . . . . .                                      | 6         |
| 1.1.2 Applications de l'interférométrie atomique aux mesures de haute précision . . . . .   | 16        |
| 1.1.3 Principales motivations pour l'utilisation d'un condensat de Bose-Einstein . . . . .  | 20        |
| 1.2 Condensat de Bose-Einstein comme source pour l'interférométrie .                        | 22        |
| 1.2.1 Test du principe d'équivalence . . . . .  | 23        |
| 1.2.2 Test de l'électrodynamique quantique . . . . .  | 26        |
| <b>2 Condensation de Bose-Einstein</b>  | <b>29</b> |
| 2.1 La condensation de Bose-Einstein . . . . .  | 30        |
| 2.1.1 Condensation de Bose-Einstein dans un piège harmonique                                | 30        |
| 2.1.2 Effet des interactions : équation de Gross-Pitaevskii . . . .                         | 34        |
| 2.2 Refroidissement évaporatif au sein d'un piège conservatif . . . . .                     | 36        |
| 2.2.1 Lois d'échelle pour un piège harmonique . . . . .                                     | 36        |
| 2.2.2 Piège dipolaire optique . . . . .   | 38        |
| <b>3 Interférométrie atomique en champ moyen</b>  | <b>45</b> |
| 3.1 Effet du champ moyen d'interactions au cours de la séquence interférométrique . . . . . | 46        |
| 3.1.1 Phases acquises lors d'une impulsion Raman . . . . .                                  | 49        |
| 3.1.2 Phases acquises par libre propagation . . . . .                                       | 59        |



|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 3.1.3    | Effet combiné : étude d'une interrogation de Ramsey . . .   | 62         |
| 3.2      | Effet systématique lié à la présence d'interactions . . . . .   | 68         |
| 3.2.1    | Détermination de la différence de phase finale . . . . .  | 68         |
| 3.2.2    | Influence de la durée des impulsions Raman . . . . .  | 73         |
| 3.2.3    | Influence de l'extension spatiale du nuage . . . . .  | 77         |
| 3.2.4    | Configuration « gravimètre » . . . . .  | 81         |
| 3.2.5    | Interféromètre de Ramsey-Bordé utilisant des séparatrices<br>à double diffraction . . . . .                                 | 87         |
| <b>4</b> | <b>Conception d'un nouveau dispositif expérimental</b>  | <b>95</b>  |
| 4.1      | Gravimètre compact fondé sur les oscillations de Bloch : Mesures<br>absolues des fréquences . . . . .                       | 96         |
| 4.1.1    | Laser étalon de fréquence . . . . .   | 97         |
| 4.1.2    | Contrôle des fréquences . . . . .   | 99         |
| 4.2      | Nouveau dispositif pour la condensation . . . . .   | 109        |
| 4.2.1    | Enceinte à vide . . . . .   | 110        |
| 4.2.2    | Sources lasers pour le piégeage et le refroidissement . . . .   | 113        |
| 4.2.3    | Piège magnéto-optique 2D . . . . .  | 120        |
| 4.2.4    | Piège magnéto-optique 3D . . . . .  | 122        |
| 4.3      | Piège dipolaire et évaporation . . . . .  | 130        |
| 4.3.1    | Chargement du piège . . . . .   | 131        |
|          | <b>Conclusion et perspectives</b>   | <b>137</b> |
|          | <b>Annexes</b>  | <b>139</b> |
| A        | Résolution numérique des équations de Gross-Pitaevskii couplées<br>et simulation de la séquence interférométrique . . . . . | 139        |
| A.1      | Equations de Gross-Pitaevskii couplées à 1D . . . . .   | 139        |
| A.2      | Méthode numérique . . . . .   | 142        |
| A.3      | Simulation de la séquence interférométrique . . . . .   | 146        |
| B        | Détermination de l'ordre 1 de l'opérateur d'évolution . . . . .   | 148        |
| C        | Publications . . . . .  | 151        |

# Introduction

Le développement des techniques de refroidissement et de manipulation d'atomes froids par laser, depuis une vingtaine d'années, a permis l'émergence de l'interférométrie atomique en tant qu'outil privilégié pour la métrologie et les tests de la physique fondamentale. En effet, cette technique a permis d'effectuer des mesures toujours plus précises de l'accélération de la pesanteur  $g$  ou de la constante de structure fine  $\alpha$ , par exemple. Cependant, cette quête de précision se heurte actuellement à différents obstacles, tels que la présence d'effets systématiques ou le besoin d'utiliser des techniques nouvelles afin de gagner en sensibilité.

Depuis quelques années, grâce à l'émergence de la thématique de la condensation de Bose-Einstein, depuis sa première démonstration expérimentale en 1995, l'utilisation de sources d'atomes condensés pour l'interférométrie atomique a été proposée pour les mesures de haute précision. En effet, avec le développement des techniques de condensation, il est apparu que des gaz d'atomes plus froids constitueraient une amélioration majeure, et permettrait de s'affranchir de certains effets systématiques et faciliterait l'implémentation de nouvelles techniques.

Actuellement, une nouvelle génération d'interféromètres atomiques utilisant des condensats de Bose-Einstein se constitue. C'est dans ce contexte que se place la thèse présentée dans ce manuscrit. En effet, l'utilisation de gaz condensés présente de nombreux avantages pour le gain en précision des mesures, cependant, dans de tels gaz, les interactions entre les atomes deviennent plus importantes et pourraient au contraire constituer un nouvel obstacle. L'enjeu du présent travail est donc précisément de réaliser une nouvelle expérience permettant d'obtenir un condensat de Bose-Einstein qui sera utilisé comme source pour l'interférométrie atomique, ainsi que d'étudier l'effet des interactions entre atomes.

Le travail de thèse présenté dans ce manuscrit s'articule autour de deux axes principaux : tout d'abord, l'étude de l'effet des interactions au sein d'un interféro-

mètre atomique basé sur des impulsions lasers, et d'autre part la conception et la réalisation d'un nouveau dispositif expérimental visant à produire un condensat de Bose-Einstein de rubidium, qui servira comme source atomique pour l'interférométrie et les oscillations de Bloch dans un réseau optique accéléré. Le premier axe a fait l'objet d'une étude dans laquelle une simulation numérique résolvant les équations de Gross-Pitaevskii a été conçue et un modèle analytique développé. Les résultats que nous avons obtenus, ainsi que le modèle développé sont présentés dans le chapitre 3. Le deuxième axe concerne la conception et la réalisation d'un nouveau dispositif expérimental, visant à produire un condensat de Bose-Einstein, avec comme objectif son utilisation pour la réalisation d'un interféromètre atomique pour la métrologie. Ce nouveau dispositif permettra d'une part de faire des mesures ultra-précises du rapport  $h/m$  entre la constante de Planck et la masse du rubidium afin de déterminer une valeur de la constante de structure fine  $\alpha$ , et d'autre part elle permettra de réaliser des mesures locales de l'accélération de la pesanteur  $g$ . Nous avons donc intégralement conçu et réalisé ce nouveau dispositif, que ce soit l'enceinte à vide, les sources lasers et l'instrumentation nécessaire pour le fonctionnement d'une telle expérience. Cette partie du travail est présentée dans le chapitre 4.

## Plan du manuscrit

Dans ce manuscrit, nous décrivons le travail que nous avons effectué dans l'étude de l'utilisation d'un condensat de Bose-Einstein comme source pour l'interférométrie atomique et pour le développement de la nouvelle expérience de l'équipe  $h/m$ . Le présent manuscrit est organisé de la façon suivante :

- Dans le **chapitre 1**, nous présentons l'état de l'art actuel de l'interférométrie atomique pour les mesures de haute précision. Nous présentons les enjeux pour la physique fondamentale que représente l'utilisation de sources d'atomes condensés dans un tel domaine, et nous présentons quelques expériences en cours de développement.
- Le **chapitre 2** constitue quelques rappels concernant le phénomène de condensation de Bose-Einstein, ainsi que les spécificités de tels gaz. Nous présentons de plus la technique de piégeage permettant leur obtention expérimentale.

- Au **chapitre 3**, nous présentons l'étude que nous avons réalisée concernant l'effet des interactions entre atomes au sein d'un interféromètre atomique, dans l'approximation du champ moyen. Nous présentons un modèle analytique permettant le calcul simple du déphasage induit par celles-ci dans deux schémas d'interféromètres atomiques : Ramsey-Bordé et Mach-Zehnder. Nous comparons ce dernier à des simulations numériques, se fondant sur la résolution numérique des équations de Gross-Pitaevskii couplées, et dont le détail de la réalisation pourra être trouvé en annexe.
- Enfin, le **chapitre 4** présente le travail expérimental effectué au cours de la présente thèse. Nous présentons tout d'abord les mesures de fréquences que nous avons effectuées pour le schéma de gravimètre compact utilisant les oscillations de Bloch, développé dans l'équipe. Puis, nous présentons les différentes composantes du nouveau dispositif expérimental, que nous avons construit : chambre à vide, sources lasers, chaîne de fréquences. Nous fermerons ce chapitre sur les résultats préliminaires que nous avons obtenus.



# Chapitre 1

## Interférométrie atomique avec un condensat de Bose-Einstein : enjeux et défis

L'interférométrie atomique, depuis ses premières démonstrations expérimentales, s'est révélée être une technique extrêmement sensible pour les mesures de haute précision. Actuellement, cette technique offre des perspectives prometteuses dans le but de tester la physique fondamentale [Dimopoulos et al., 2009, Müntinga et al., 2013, Graham et al., 2013] : principe d'équivalence, relativité générale, détection des ondes gravitationnelles et électrodynamique quantique. L'enjeu principal pour la réalisation expérimentale de tels tests est de repousser la sensibilité et la précision au-delà de l'état de l'art des mesures de haute précision de la gravité  $g$  et des effets inertiels, de la constante de gravité  $G$  et de la constante de structure fine  $\alpha$ .

Dans cet objectif, de nouvelles approches ont été proposées pour la construction d'une nouvelle génération d'interféromètres atomiques extrêmement sensibles et s'affranchissant au maximum des effets systématiques : séparatrices à large transfert d'impulsion (Large Momentum Transfer Beamsplitters) utilisant la diffraction de Bragg ou les oscillations de Bloch [Müller et al., 2008, Cladé et al., 2009, Chiow et al., 2011, McDonald et al., 2013], nouvelles stratégies de détection [Graham et al., 2013, Sugarbaker et al., 2013], développement de sources lasers de puissance importante [Chiow et al., 2012, Sané et al., 2012]. Dans cette optique, le condensat de Bose-Einstein semble être la source atomique idéale. De

telles sources combinent un faible étalement aussi bien spatial qu'en vitesse à une grande brillance. Cependant, les interactions entre atomes dans de telles sources constituent leur inconvénient majeur, étant donné qu'elles donnent naissance à des déplacements des niveaux atomiques dépendant de la densité du gaz, et donc entraînent des déphasages au sein de l'interféromètre. Cet effet sera présenté et étudié dans le chapitre 3.

Dans ce chapitre, nous présentons cette nouvelle génération d'interféromètres, dont le but est de repousser les limites des mesures de haute précision. Nous faisons tout d'abord quelques rappels sur l'interférométrie atomique, puis nous présentons différentes expériences très récentes utilisant ces nouvelles approches.

## 1.1 Interférométrie atomique

La découverte de la nature ondulatoire de la matière par de Broglie en 1923 a ouvert la voie à de nouveaux domaines d'investigation. En effet, appliquer les méthodes d'optique ondulatoire aux ondes de matière devenait alors envisageable. Cependant, la longueur d'onde associée à une particule étant inversement proportionnelle à son impulsion, il a fallu attendre un certain temps avant de disposer de sources de particules suffisamment cohérentes. Les premiers interféromètres à ondes de matière ont été réalisés à partir de faisceaux d'électrons [Marton, 1952] et de neutrons [Rauch et al., 1974] diffractés. Le développement des techniques de refroidissement laser ont permis de réaliser les premiers interféromètres atomiques [Keith et al., 1991, Kasevich and Chu, 1992].

Dans cette section, nous rappelons le principe de l'interférométrie atomique utilisant des séquences d'impulsions laser. Nous donnons un bref aperçu des outils permettant de manipuler les atomes, ainsi que des configurations interférométriques les plus courantes. Nous rappelons les principales applications de ces configurations, et enfin, nous présentons les perspectives qu'offrent les condensats de Bose-Einstein.

### 1.1.1 Principe de l'interférométrie atomique

Le principe de l'interférométrie atomique consiste, comme son homologue optique, à faire emprunter à un paquet d'onde atomique incident deux chemins différents. A la fin de l'interféromètre, ces deux chemins se recombinent, lais-

sant apparaître une figure d'interférences, qui dépend de la différence entre les phases accumulées le long de chacun des deux chemins. Contrairement à leurs

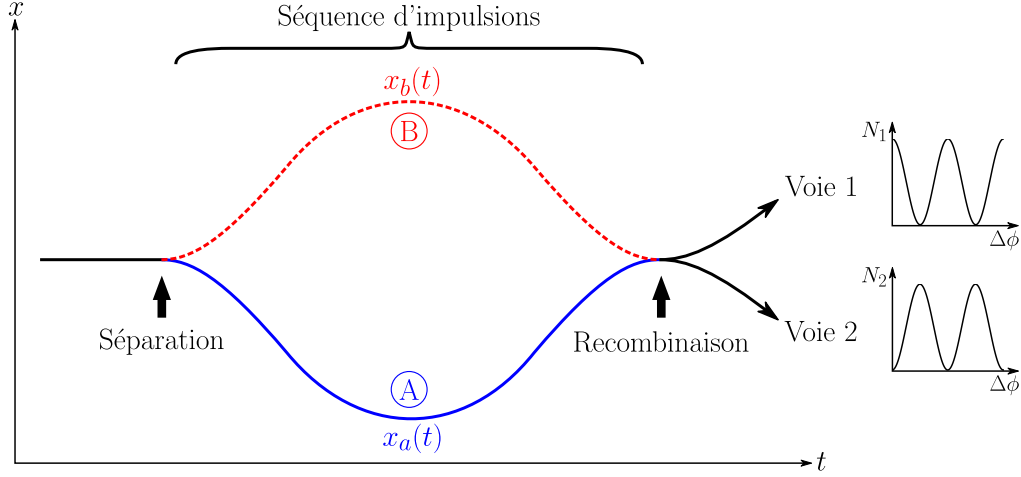


Fig. 1.1 Principe d'un interféromètre atomique.

homologues optiques, les interféromètres atomiques sont extrêmement sensibles aux forces d'inertie. En effet, le fait que les atomes possèdent une masse les rend d'autant plus sensibles aux forces d'inertie. Cela fait donc des interféromètres atomiques des outils très adaptés à la mesure de telles forces.

### Manipulation cohérente des paquets d'onde atomiques

Les bras d'un interféromètre atomique sont réalisés en manipulant les atomes grâce à l'interaction entre un champ laser et ces derniers. Il est ainsi possible d'obtenir des analogues aux miroirs et séparatrices utilisés dans les interféromètres optiques. Le principe repose sur la conservation du moment cinétique entre le champ laser et l'atome. Ainsi, lorsqu'un atome absorbe (émet) un photon de moment  $\hbar\mathbf{k}$ , une impulsion de  $\hbar\mathbf{k}$  ( $-\hbar\mathbf{k}$ ) lui est transmise.

La plupart des interféromètres actuels utilisent des transitions stimulées à deux photons afin de réaliser leurs séparatrices atomiques : transitions Raman ou Bragg. Dans le cas d'une transition Raman, deux lasers de fréquences  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont fortement désaccordés par rapport à une transition optique (entre les niveaux  $|g\rangle$  et  $|i\rangle$ ), tandis que leur différence de fréquence est, elle, résonante avec une transition micro-onde de fréquence  $\omega_{\text{SHF}}/2\pi$  entre deux niveaux hyperfins  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$ . Le désaccord de la fréquence des deux lasers par rapport à la transition entre  $|g\rangle$  et  $|i\rangle$  permet d'éviter que le niveau  $|i\rangle$  soit peuplé et donc que les



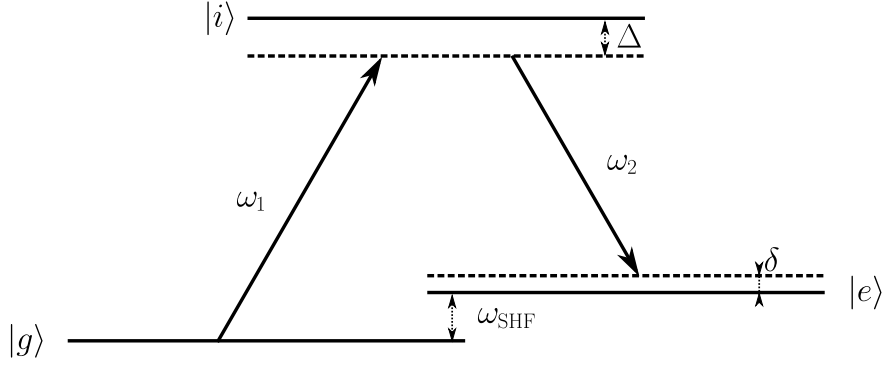


Fig. 1.2 Principe d'une transition Raman stimulée à deux photons. L'atome absorbe un photon de l'onde de pulsation  $\omega_1$  et réémet un photon par émission stimulée dans la deuxième, de pulsation  $\omega_2$ .  $\Delta$  est le désaccord par rapport à la transition à 1 photon, tandis que  $\delta$  est celui par rapport à celle à 2 photons.

atomes retombent dans  $|g\rangle$  par émission spontanée. Ainsi, l'atome absorbe un photon dans la première onde et émet un photon par émission stimulée dans la seconde. Une impulsion totale de  $\hbar(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$  lui est donc transmise. Ce système se comporte sous certaines conditions comme un système à deux niveaux effectifs, où la population atomique effectue des oscillations de Rabi entre les deux niveaux hyperfins  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$  [Moler et al., 1992]. Le couplage effectif  $\Omega_{\text{eff}}$  entre ces deux niveaux est proportionnel au produit des deux pulsations de Rabi des transitions à 1 photon et à l'inverse du désaccord  $\Delta$  à la transition à 1 photon. La population d'atomes oscillera alors à la fréquence  $\Omega_{\text{eff}}/2\pi$  entre les deux états. La probabilité, pour un atome dans l'état  $|g\rangle$  de passer dans l'état  $|e\rangle$  est donnée par :

$$P_{g \rightarrow e}(t) = \frac{\Omega_{\text{eff}}^2}{\Omega_{\text{eff}}^2 + \delta_R^2} \sin^2 \left( \sqrt{\Omega_{\text{eff}}^2 + \delta_R^2} t / 2 \right), \quad (1.1.1)$$

avec  $\delta_R$  le désaccord Raman. En appliquant des impulsions lasers plus ou moins longues, il est ainsi possible de contrôler la fraction d'atomes transférée d'un niveau hyperfin à l'autre. A résonance, il est alors possible de réaliser l'équivalent atomique d'une lame séparatrice 50/50, pour la condition  $\Omega_{\text{eff}}\tau = \pi/2$ , où  $\tau$  correspond à la durée d'interaction du nuage d'atomes avec les lasers. Le miroir atomique est, lui, obtenu pour la condition  $\Omega_{\text{eff}}\tau = \pi$ , qui correspond au transfert de tous les atomes d'un état vers un autre. Lorsque les deux faisceaux sont contre-propageants, leurs vecteurs d'onde sont donnés par  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 \approx -\mathbf{k}_2$  et l'impulsion transférée aux atomes est  $\hbar(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \approx 2\hbar\mathbf{k}$ . Ceci permet de transférer deux fois

le recul équivalent à l'absorption d'un photon aux atomes. L'utilisation d'une transition Raman stimulée permet ainsi de corrélér l'état externe des atomes à leurs degrés de liberté interne. Ceci présente l'avantage que les deux voies de sortie de l'interféromètre correspondent chacune à un état interne, facilitant ainsi la détection [Bordé, 1989]. Au contraire, dans le cas d'une transition de Bragg, la différence de fréquences entre les deux lasers est telle que son état interne reste inchangé. On n'a ainsi pas de corrélation entre état interne et impulsion.

### Calcul du déphasage

Le calcul du déphasage accumulé le long de l'interféromètre est réalisé grâce à une approche en intégrales de chemin [Storey and Cohen-Tannoudji, 1994]. De façon générale, la différence de phase totale entre les deux bras de l'interféromètre présenté dans la figure 1.1 est donnée par l'expression :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{\text{laser}} + \Delta\phi_{\text{propagation}}. \quad (1.1.2)$$

Le terme  $\Delta\phi_{\text{laser}}$  provient de l'interaction entre le champ laser et les atomes. Lors de chaque impulsion, le champ laser imprime sur les atomes une phase qui est donnée par :

$$\phi_l(t_0, \mathbf{r}(t_0)) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t_0) - \omega t_0 + \phi, \quad (1.1.3)$$

où  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde effectif du champ laser,  $\omega$  sa pulsation,  $\mathbf{r}$  la position du nuage atomique sur la trajectoire classique et  $t_0$  l'instant initial de l'impulsion. Ainsi,  $\Delta\phi_{\text{laser}}$  est donné par :

$$\Delta\phi_{\text{laser}} = \left( \sum_i \pm \phi_l(t_i, \mathbf{r}_B(t_i)) \right) - \left( \sum_i \pm \phi_l(t_i, \mathbf{r}_A(t_i)) \right). \quad (1.1.4)$$

Dans cette expression, les  $t_i$  sont les instants auxquels les atomes interagissent avec le champ laser et le signe de chacun des termes est donné par le fait que les atomes gagnent ou perdent de l'impulsion.

Le terme  $\Delta\phi_{\text{propagation}}$  rend compte de la propagation des atomes le long des chemins  $A$  et  $B$  entre les impulsions lasers. Le long d'un segment de trajectoire  $\Gamma$ , compris entre deux impulsions lasers, la phase acquise par le nuage atomique est donnée par :

$$\phi_\Gamma = \frac{S_{\text{cl}}}{\hbar}, \quad (1.1.5)$$

avec  $S_{\text{cl}}$  l'action classique, qui est telle que :

$$S_{\text{cl}} = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(\mathbf{r}_{\Gamma}(t), \dot{\mathbf{r}}_{\Gamma}(t)) dt, \quad (1.1.6)$$

avec  $t_i$  et  $t_f$  les instants initial et final du segment,  $\mathbf{r}_{\Gamma}(t)$  et  $\dot{\mathbf{r}}_{\Gamma}(t)$  la position et la vitesse des atomes empruntant  $\Gamma$  respectivement, et  $\mathcal{L}$  le Lagrangien, donné par :

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{mv^2}{2} - V(\mathbf{r}), \quad (1.1.7)$$

où  $V(\mathbf{r})$  est le potentiel auquel les atomes sont soumis au point  $\mathbf{r}$ . En considérant les atomes soumis à une force conservative  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , le potentiel se réécrit comme  $V = -m\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$ , et le Lagrangien est alors donné par :

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} + m\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}. \quad (1.1.8)$$

La différence de phase  $\Delta\phi_{\text{propagation}}$  est alors donnée par :

$$\Delta\phi_{\text{propagation}} = \frac{1}{\hbar} \sum_i \Delta S_{\Gamma_i}, \quad (1.1.9)$$

c'est-à-dire par la somme des différences de phase acquises sur chacun des segments  $\Gamma_i$ .

Considérons l'interféromètre de la figure 1.1 dans le cas où les atomes ne sont soumis qu'à la séquence d'impulsions lasers. La phase de propagation accumulée dans chacun des bras  $i$  au cours de l'interféromètre est donnée par :

$$\phi_i = \frac{m}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \left( \frac{v_i^2}{2} + \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_i \right) dt. \quad (1.1.10)$$

L'intégration par partie du deuxième terme nous donne :

$$\int_{t_i}^{t_f} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_i dt = [\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_i]_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} v_i^2 dt, \quad (1.1.11)$$

et on obtient donc :

$$\phi_i = \frac{m}{\hbar} [\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_i]_{t_i}^{t_f} - \frac{m}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \frac{v_i^2}{2} dt. \quad (1.1.12)$$

La différence de phase est donc donnée par :

$$\Delta\phi_{\text{propagation}} = \frac{m}{\hbar} [\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{r}_B - \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{r}_A]_{t_i}^{t_f} - \frac{m}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \frac{v_B^2 - v_A^2}{2} dt \quad (1.1.13)$$

$$= \Delta\phi_{\text{séparation}} + \Delta\phi_{\text{cinétique}}. \quad (1.1.14)$$

Le terme  $\Delta\phi_{\text{séparation}}$  peut se réécrire comme :

$$\Delta\phi_{\text{séparation}} = \frac{1}{\hbar} [\mathbf{p}_B(t_f) \cdot \mathbf{r}_B(t_f) - \mathbf{p}_A(t_f) \cdot \mathbf{r}_A(t_f) - \mathbf{p}_B(t_i) \cdot \mathbf{r}_B(t_i) \quad (1.1.15)$$

$$+ \mathbf{p}_A(t_i) \cdot \mathbf{r}_A(t_i)]. \quad (1.1.16)$$

Les impulsions des deux bras avant leur séparation et après leur recombinaison étant égales, on a  $\mathbf{p}_A(t_f) = \mathbf{p}_B(t_f)$  et  $\mathbf{p}_A(t_i) = \mathbf{p}_B(t_i)$ , de plus, pour qu'il y ait interférence à la fin de l'interféromètre, on doit avoir  $\mathbf{r}_A(t_f) = \mathbf{r}_B(t_f)$ , donc  $\Delta\phi_{\text{séparation}}$  se réécrit finalement :

$$\Delta\phi_{\text{séparation}} = \frac{1}{\hbar} \mathbf{p}(t_i) \cdot \Delta\mathbf{r}(t_i), \quad (1.1.17)$$

avec  $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ . Ce terme rend donc compte de la séparation spatiale initiale entre les deux trajectoires, et s'annule dans le cas où celles-ci sont confondues. Dans le cas d'un interféromètre symétrique, c'est-à-dire où les atomes passent le même temps dans chaque état d'impulsions  $\mathbf{p}(t_i)$  et  $\mathbf{p}(t_i) + \hbar\mathbf{k}_{\text{eff}}$ , le terme  $\Delta\phi_{\text{cinétique}}$  s'annule lui aussi. La différence de phase totale de l'interféromètre est donc donnée de façon générale par :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{\text{laser}} + \Delta\phi_{\text{cinétique}} + \Delta\phi_{\text{séparation}}. \quad (1.1.18)$$

On considère maintenant le même interféromètre au sein duquel les atomes sont soumis à une accélération constante  $\mathbf{a}$ . Celle-ci peut être considérée comme une perturbation par rapport à la situation précédente, on peut donc écrire les positions, vitesses et accélérations perturbées comme respectivement  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^{(0)} + \mathbf{r}_a$ ,  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^{(0)} + \mathbf{v}_a$  et  $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i^{(0)} + \mathbf{a}$ , où  $\mathbf{r}_i^{(0)}$ ,  $\mathbf{v}_i^{(0)}$  et  $\mathbf{a}_i^{(0)}$  correspondent à la situation non perturbée. La différence des phases perturbées peut s'écrire comme :

$$\Delta\phi = \frac{m}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \left( \frac{v_B^2 - v_A^2}{2} + \mathbf{a}_B \cdot \mathbf{r}_B - \mathbf{a}_A \cdot \mathbf{r}_A \right) dt. \quad (1.1.19)$$

L'intégrale du premier terme donne :

$$\frac{m}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \frac{v_B^2 - v_A^2}{2} dt = \frac{m}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \left( \frac{v_B^{(0)2} - v_A^{(0)2}}{2} + \mathbf{v}_a(\mathbf{v}_B^{(0)} - \mathbf{v}_A^{(0)}) \right) dt, \quad (1.1.20)$$

et le second :

$$\begin{aligned} \frac{m}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \Delta [\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}] dt &= \frac{m}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \left( \mathbf{a}_B^{(0)} \cdot \mathbf{r}_B^{(0)} - \mathbf{a}_A^{(0)} \cdot \mathbf{r}_A^{(0)} + (\mathbf{a}_B^{(0)} - \mathbf{a}_A^{(0)}) \cdot \mathbf{r}_a \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{r}_B^{(0)} - \mathbf{r}_A^{(0)}) \right) dt, \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{m}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \Delta [\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}] dt &= \Delta \phi_{\text{séparation}} - \frac{m}{\hbar} \left[ \int_{t_i}^{t_f} (v_B^{(0)2} - v_A^{(0)2}) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{v}_a \cdot (\mathbf{v}_B^{(0)} - \mathbf{v}_A^{(0)}) dt - \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{r}_B^{(0)} - \mathbf{r}_A^{(0)}) dt \right]. \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

On obtient ainsi la différence de phase totale de l'interféromètre :

$$\Delta \phi = \Delta \phi_{\text{laser}}^{(0)} + \Delta \phi_{\text{cinétique}} + \Delta \phi_{\text{séparation}} + \Delta \phi_{\text{inertiel}}, \quad (1.1.23)$$

où la phase due aux impulsions lasers correspond à celle de la situation non perturbée, et  $\Delta \phi_{\text{inertiel}}$  est donnée par :

$$\Delta \phi_{\text{inertiel}} = \frac{m}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{r}_B^{(0)} - \mathbf{r}_A^{(0)}) dt = \frac{m}{\hbar} \mathbf{a} \cdot \mathcal{A}, \quad (1.1.24)$$

avec  $\mathcal{A} = \int_{t_i}^{t_f} (\mathbf{r}_B^{(0)} - \mathbf{r}_A^{(0)}) dt$  la surface englobée par l'interféromètre non perturbé. Ainsi, si l'interféromètre est symétrique, qu'il n'y a pas de séparation spatiale initiale entre les trajectoires, la différence de phase totale est donnée par :

$$\Delta \phi = \Delta \phi_{\text{laser}} + \frac{m}{\hbar} \mathbf{a} \cdot \mathcal{A}. \quad (1.1.25)$$

Ainsi, dans ce cas, le déphasage entre les deux bras de l'interféromètre dépend uniquement de l'aire contenue par leurs trajectoires et de la phase des lasers.

### Configurations interférométriques

Nous présentons ici les deux configurations les plus courantes d'interféromètres atomiques utilisant des impulsions lasers, qui sont utilisées dans les expériences actuelles. Il s'agit des configurations Mach-Zehnder ainsi que Ramsey-Bordé, auxquelles nous appliquons le formalisme décrit au paragraphe précédent pour le calcul de leur déphasage.

**Configuration Mach-Zehnder** L'analogie atomique de l'interféromètre de Mach-Zehnder est réalisé à l'aide d'une série de trois impulsions lasers. La première et la troisième correspondent à la condition  $\pi/2$  et permettent respectivement d'ouvrir et de refermer les deux bras de l'interféromètre. La seconde impulsion, à la condition  $\pi$ , joue le rôle de miroir, et permet aux deux chemins de s'intersecter lors de la troisième impulsion. Cette configuration a été mise en œuvre expérimentalement en 1992 par Mark Kasevich et Steven Chu [Kasevich and Chu, 1992]. La figure 1.3 présente les trajectoires classiques empruntées par

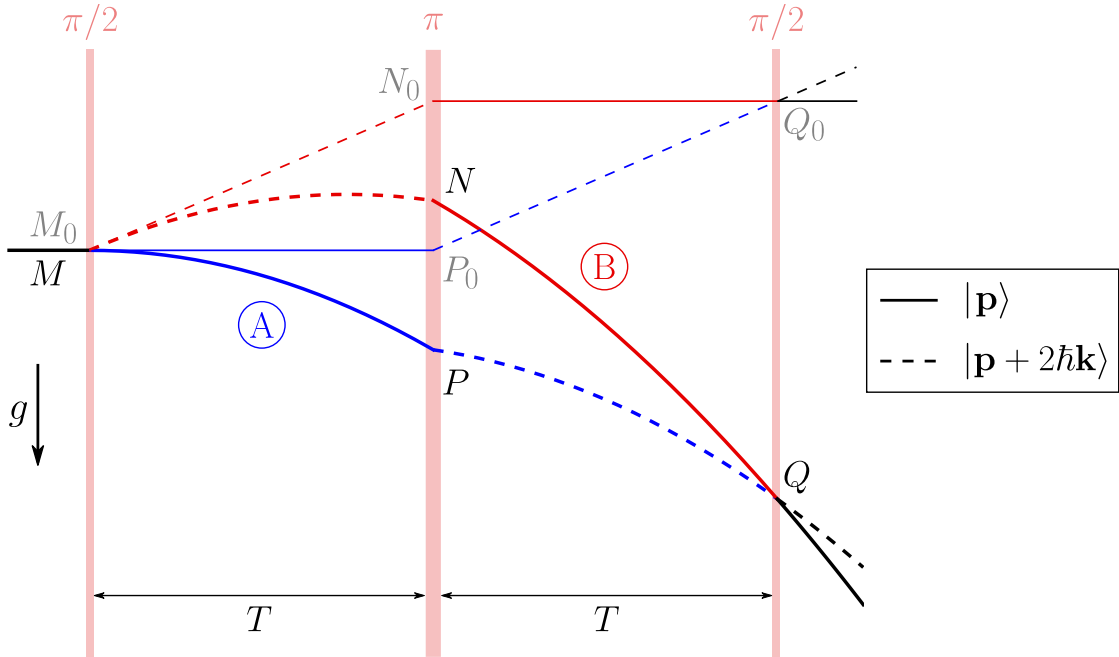


Fig. 1.3 Trajectoires classiques des chemins A et B empruntés par les atomes dans la configuration Mach-Zehnder. En présence d'une accélération uniforme, ici l'accélération de la pesanteur  $g$ , les trajectoires  $(M_0N_0Q_0)$  et  $(M_0P_0Q_0)$  sont respectivement remplacées par  $(MNQ)$  et  $(MPQ)$ .

les atomes dans cette configuration.

On applique le formalisme présenté à la section précédente afin de déterminer le déphasage final de l'interféromètre. La séparation spatiale entre les deux trajectoires lors de la recombinaison est nulle, on peut donc tout d'abord en déduire que  $\Delta\phi_{\text{séparation}} = 0$ . L'interféromètre étant symétrique, les phases dues à la propagation des atomes le long de chacune des trajectoires se compensent, et l'on a  $\Delta\phi_{\text{cinétique}} = 0$ . Ainsi, le déphasage ne dépend donc que des phases acquises par les atomes au cours de chacune des impulsions lasers, et :

$$\Delta\phi_{\text{total}} = \Delta\phi_{\text{laser}} = \phi_l^B - \phi_l^A, \quad (1.1.26)$$

où  $\phi_l^C$  représente la phase totale induite par les impulsions lasers sur les atomes le long du chemin  $C$ . Les positions atomiques, en présence de gravité, aux temps  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = T$  et  $t_3 = 2T$ , s'expriment en fonction de celles où l'accélération de la pesanteur ne s'applique pas. Elles sont données par :

$$z_M = z_{M_0}, \quad z_N = z_{N_0} - \frac{gT^2}{2}, \quad z_P = z_{P_0} - \frac{gT^2}{2} \quad \text{et} \quad z_Q = z_{Q_0} - 2gT^2. \quad (1.1.27)$$

D'après (1.1.4), et en suivant les trajectoires  $(MNQ)$  et  $(MPQ)$ , les phases lasers sont données par :

– le long de  $(MPQ)$  :

$$\phi_l^A = k_{\text{eff}} \left( z_{P_0} - \frac{gT^2}{2} \right) - \omega_{\text{eff}}T + \varphi_2, \quad (1.1.28)$$

– le long de  $(MNQ)$  :

$$\phi_l^B = k_{\text{eff}}z_{M_0} + \varphi_1 - k_{\text{eff}} \left( z_{N_0} - \frac{gT^2}{2} \right) + \omega_{\text{eff}}T - \varphi_2 \quad (1.1.29)$$

$$+ k_{\text{eff}} \left( z_{Q_0} - 2gT^2 \right) - 2\omega_{\text{eff}}T + \varphi_3, \quad (1.1.30)$$

soit :

$$\phi_l^B = k_{\text{eff}} \left( z_{M_0} + z_{Q_0} - z_{N_0} - \frac{3gT^2}{2} \right) - \omega_{\text{eff}}T + \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3, \quad (1.1.31)$$

où  $\varphi_i$  représente la phase des lasers lors de la  $i$ -ème impulsion et  $k_{\text{eff}} = k_1 + k_2$  et  $\omega_{\text{eff}}$  représentent respectivement leurs vecteur d'onde et pulsation effectifs.

Etant donné que  $(M_0 N_0 P_0 Q_0)$  forme un parallélogramme, on a de plus l'identité suivante :

$$z_{M_0} + z_{Q_0} - z_{N_0} - z_{P_0} = 0, \quad (1.1.32)$$

de telle sorte que l'on peut écrire le déphasage comme :

$$\Delta\phi = -k_{\text{eff}}gT^2 + \varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3. \quad (1.1.33)$$

L'interfrange est donc donné par  $2\pi/(k_{\text{eff}}T^2)$ .

**Configuration Ramsey-Bordé** Dans cette géométrie d'interféromètre, le miroir atomique au centre de la séquence Mach-Zehnder est remplacé par deux séparatrices  $\pi/2$ , séparées d'une durée  $T'$ . Cette séquence est donc équivalente à deux interféromètres de Ramsey successifs, séparés du temps  $T'$ . La figure 1.4

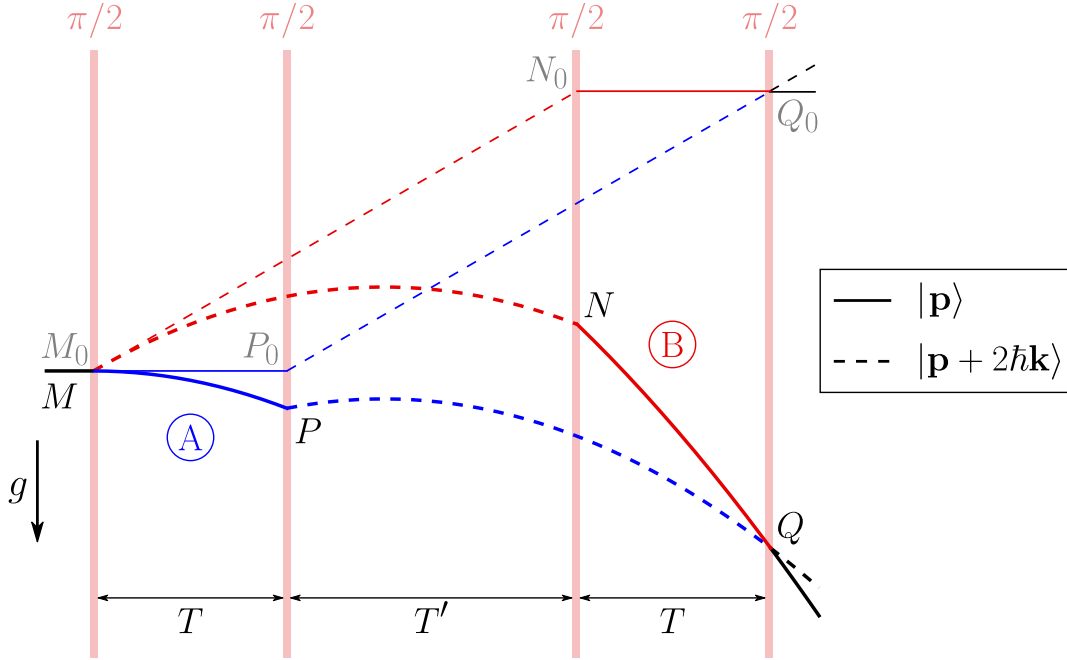


Fig. 1.4 Trajectoires dans la configuration Ramsey-Bordé.

présente les trajectoires décrites par les deux chemins.

Comme dans le cas de la configuration précédente, les trajectoires étant parfaitement symétriques, le déphasage induit par la propagation des atomes est nul, de même que  $\Delta\phi_{\text{séparation}}$ . Les phases lasers pour chacun des chemins sont données par :



– pour le segment  $(MPQ)$  :

$$\phi_l^A = k_{\text{eff}} z_P - \omega_{\text{eff}} T + \varphi_2, \quad (1.1.34)$$

– pour le segment  $(MNQ)$  :

$$\phi_l^B = k_{\text{eff}} z_M + \varphi_1 - k_{\text{eff}} z_N + \omega_{\text{eff}}(T + T') - \varphi_3 + k_{\text{eff}} z_Q - \omega_{\text{eff}}(2T + T') + \varphi_4. \quad (1.1.35)$$

Le déphasage total a donc pour expression :

$$\Delta\phi = \phi_l^B - \phi_l^A = k_{\text{eff}}(z_M + z_Q - z_N - z_P) + \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4. \quad (1.1.36)$$

Les positions peuvent s'écrire comme précédemment en fonction des positions des trajectoires sans présence de  $g$ . Elles sont données par :

$$z_M = z_{M_0}, z_P = z_{P_0} - \frac{gT^2}{2}, z_N = z_{N_0} \frac{g(T + T')^2}{2} \text{ et } z_Q = z_{Q_0} - \frac{g(2T + T')^2}{2}. \quad (1.1.37)$$

En remplaçant dans (1.1.36), et en utilisant le fait que  $(M_0 N_0 P_0 Q_0)$  est encore un parallélogramme, donc l'expression (1.1.32) est toujours vraie, on obtient :

$$\Delta\phi = -k_{\text{eff}} g T(T + T') + \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4. \quad (1.1.38)$$

### 1.1.2 Applications de l'interférométrie atomique aux mesures de haute précision

Dans cette partie, nous présentons brièvement les utilisations des interféromètres atomiques comme senseurs inertiels, permettant de réaliser des mesures de haute précision.

#### Mesures d'accélération

De façon générale, la configuration Mach-Zehnder est sensible à toute accélération uniforme  $\mathbf{a}$ . On peut montrer que le déphasage total dans ce cas est donné par :

$$\Delta\phi = -\mathbf{k}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{a} T^2 + \varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3, \quad (1.1.39)$$

où  $\hbar \mathbf{k}_{\text{eff}}$  est l'impulsion échangée entre le champ laser et les atomes. Il est ainsi possible d'utiliser l'interférométrie pour réaliser un accéléromètre. Dans le cas d'une configuration verticale, où les atomes sont laissés en chute libre, l'accélération  $\mathbf{a}$  à laquelle ils sont soumis correspond à l'accélération de la pesanteur  $\mathbf{g}$ . Si les faisceaux lasers permettant de réaliser les séparatrices et les miroirs se propagent dans la direction verticale, il est possible de réaliser une mesure de  $g$ . En effet, si l'on applique une rampe de fréquence aux lasers permettant de réaliser la transition, au cours de l'interféromètre, avec un taux de balayage  $\alpha$ , le déphasage final sera donné par :

$$\Delta\phi = (\alpha - k_{\text{eff}}g) T^2. \quad (1.1.40)$$

En balayant  $\alpha/k_{\text{eff}}$  autour d'une valeur proche de celle de l'accélération de la pesanteur, on peut remonter à  $g$  lorsque la rampe de fréquence compense l'effet Doppler dû à la gravité, et donc lorsque le déphasage s'annule. La mesure de  $g$  est alors déterminée en repérant la position de la frange centrale. Cette mesure est indépendante du temps d'interrogation  $T$ . Le gravimètre conçu par le groupe de Steven Chu à Stanford a permis d'obtenir une incertitude relative de  $3 \cdot 10^{-9}$  [Peters et al., 2001] avec une sensibilité de  $2 \cdot 10^{-8} g \cdot \text{Hz}^{-1/2}$ .

Il est aussi possible d'utiliser la configuration Ramsey-Bordé en mode gravimètre. En effet, si l'on applique une rampe de fréquence  $\alpha$  à la première séquence de Ramsey, séquence de sélection, la phase de la  $i$ -ème impulsion est alors donnée par :

$$\phi_i^{\text{sel}}(z, t) = k_{\text{eff}}z - \frac{\alpha(t - t_1)^2}{2} - \omega_{\text{sel}}t, \quad (1.1.41)$$

avec  $t_1$  le temps auquel a lieu la première impulsion,  $\omega_{\text{sel}}$  la fréquence utilisée lors de la sélection. De même, si l'on applique la même rampe lors de la séquence de mesure (seconde séquence de Ramsey), on a :

$$\phi_i^{\text{mes}}(z, t) = k_{\text{eff}}z - \frac{\alpha(t - t_3)^2}{2} - \omega_{\text{mes}}t, \quad (1.1.42)$$

où  $t_3$  correspond à l'instant où la troisième impulsion est appliquée et  $\omega_{\text{mes}}$  est la fréquence utilisée lors de la mesure. On prend  $\alpha$  tel que  $\alpha = k_{\text{eff}}g_0$ , où  $g_0$  est une valeur proche de la véritable valeur de  $g$ . Les déphasages lors de chacune des

deux paires d'impulsions  $\pi/2$  sont donnés par :

$$\Delta\phi_I = \omega_{\text{sel}}T + \frac{k_{\text{eff}}g_0}{2}T^2 - \frac{k_{\text{eff}}g}{2}T^2, \quad (1.1.43)$$

$$\Delta\phi_{II} = \omega_{\text{mes}}T + \frac{k_{\text{eff}}g_0}{2}T^2 - \frac{k_{\text{eff}}g}{2}(2TT' + 3T^2). \quad (1.1.44)$$

Le déphasage total s'écrit alors :

$$\Delta\phi = -k_{\text{eff}}g(T + T')T + (\omega_{\text{mes}} - \omega_{\text{sel}})T. \quad (1.1.45)$$

Cette dernière expression nous indique que le déphasage s'annule pour la condition :

$$\omega_{\text{mes}} - \omega_{\text{sel}} = k_{\text{eff}}g(T + T'). \quad (1.1.46)$$

Ainsi, en faisant varier la différence de fréquence entre la sélection et la mesure, et en repérant la frange centrale où s'annule le déphasage, on peut déterminer une mesure de  $g$ .

De telles configurations peuvent aussi être utilisées afin de réaliser un gradiomètre. Le principe consiste à réaliser deux interféromètres simultanément à partir de deux nuages d'atomes froids positionnés à des hauteurs différentes. Le groupe de Mark Kasevich a atteint une sensibilité de  $4 \times 10^{-9} \text{ s}^{-2}.\text{Hz}^{-1/2}$  permettant d'obtenir une exactitude inférieure à  $10^{-9} \text{ s}^{-2}$  sur la mesure du gradient de  $g$  [McGuirk et al., 2002]. Cette configuration est aussi utilisée afin de réaliser une mesure de la constante de gravitation  $G$ , dont la précision obtenue est de l'ordre de  $4 \times 10^{-4}G$  [Rosi et al., 2014].

## Mesures de rotations

Si la plateforme sur laquelle repose l'interféromètre est en rotation à la vitesse angulaire  $\Omega$ , les atomes possèdent une composante de vitesse dans la direction perpendiculaire à  $\mathbf{k}_{\text{eff}}$ . L'interféromètre est alors sensible aux rotations. Il s'agit de l'équivalent de l'effet Sagnac dans les interféromètres optiques. Le déphasage final dû à la rotation conserve la même forme que pour une accélération, et l'on a :

$$\Delta\phi = -\mathbf{k}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{a}_c T^2 + \varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3, \quad (1.1.47)$$

où l'accélération est alors donnée par l'accélération de Coriolis :

$$\mathbf{a}_c = -2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}), \quad (1.1.48)$$

où  $\mathbf{v}$  correspond à la vitesse des atomes. Cette configuration est alors parfaitement adaptée aux mesures de rotation et donc à la réalisation de gyromètres.

### Mesure de $h/m$

La configuration de Ramsey-Bordé permet de réaliser une mesure du rapport  $h/m$ , par l'intermédiaire d'une mesure de la vitesse de recul. En effet, la vitesse de recul, qui correspond à la vitesse acquise par un atome lorsqu'il absorbe ou émet un photon d'impulsion  $\hbar k$ , est donnée par :

$$v_{\text{rec}} = \frac{\hbar k}{m}, \quad (1.1.49)$$

rendant ainsi possible la détermination d'une valeur du rapport  $h/m$  si une mesure de  $v_{\text{rec}}$  est réalisée. Cette mesure de la vitesse de recul est réalisée en exploitant l'effet Doppler. Les transitions Raman à deux photons permettent à la fois de communiquer de l'impulsion aux atomes et sont sensibles à l'effet Doppler. Le principe consiste à appliquer un désaccord différent au cours des deux séquences de Ramsey. La première série de deux impulsions  $\pi/2$  permet de sélectionner une classe de vitesse. La seconde permet de réaliser la mesure. Si l'on reprend l'expression (1.1.38) du déphasage en configuration Ramsey-Bordé, et que l'on considère une variation de vitesse quelconque  $\Delta \mathbf{v}$  entre la deuxième et la troisième impulsions, le déphasage est donné par :

$$\Delta\phi = -\mathbf{k}_{\text{eff}} \cdot (g(T + T') + \Delta \mathbf{v}) T + \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4. \quad (1.1.50)$$

La condition pour laquelle le déphasage de l'interféromètre est nul correspond à celle où la différence entre les deux désaccords compense l'effet Doppler dû à la variation de vitesse acquise entre les deux interrogations de Ramsey, permettant de réaliser un senseur de vitesse.

La première démonstration de cette technique a été réalisée sur des atomes de césium dans le groupe de Steven Chu à Stanford [Weiss et al., 1993]. L'expérience du LKB utilise les oscillations de Bloch afin de transmettre  $N$  reculs aux

atomes entre les deux interrogations de Ramsey, permettant ainsi d'améliorer la résolution de l'interféromètre et d'obtenir une précision sur la vitesse de recul de  $1,3 \times 10^{-9}$  [Bouchendira et al., 2011].

### 1.1.3 Principales motivations pour l'utilisation d'un condensat de Bose-Einstein

L'utilisation des interféromètres atomiques afin de réaliser des mesures de grande précision se heurte depuis quelques années à certaines limites. En effet, différents effets systématiques limitent l'exactitude atteinte. Parmi ceux-ci, l'effet de la courbure des fronts d'onde s'avère particulièrement important. De plus, si l'on veut gagner en précision, il faut augmenter la sensibilité des interféromètres.

#### Effet de courbure des fronts d'onde et phase de Gouy

Les interféromètres que l'on a décrits utilisent le transfert d'impulsion de  $\hbar\mathbf{k}$  réalisé entre un photon et un atome. Ainsi, on a considéré le champ laser comme une onde plane de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Si l'on utilise un faisceau gaussien, deux effets émergent :

- Phase de Gouy : le faisceau gaussien est une superposition d'ondes planes. La dispersion des vecteurs d'onde  $\mathbf{k}$  constituant le faisceau est à l'origine de la phase de Gouy.
- Courbure des fronts d'onde : les vecteurs d'onde ne sont pas parallèles à la direction de propagation du faisceau.

Pour tenir compte de ces deux effets sur l'impulsion transférée aux atomes, on doit calculer un vecteur d'onde effectif dans la direction de propagation du faisceau.

La phase d'un faisceau gaussien de col  $w_0$  est donnée par :

$$\Phi(r, z) = kz + k \frac{r^2}{2R(z)} - \zeta(z), \quad (1.1.51)$$

où  $r$  représente la position transverse à la direction de propagation du faisceau,  $R(z) = z(1 + z_R^2/z^2)$  est le rayon de courbure des fronts d'onde avec  $z_R = \pi w_0^2/\lambda$  la longueur de Rayleigh et  $\zeta(z) = \arctan(z/z_R)$  la phase de Gouy. En dérivant cette phase par rapport à  $z$ , on obtient le vecteur d'onde effectif qui est donné

par :

$$k_z^{\text{eff}} = k - \frac{2}{kw^2(z)} \left( 1 - \frac{r^2}{w^2(z)} \left( 1 - \frac{z^2}{z_R^2} \right) \right), \quad (1.1.52)$$

avec  $w(z) = w_0 \sqrt{1 + z^2/z_R^2}$ .

Cette dernière expression nous montre que si l'on veut réduire la correction à apporter à  $k$ , on doit augmenter le diamètre des faisceaux que l'on utilise. Une autre façon de minimiser cette correction est de réduire le diamètre des nuages d'atomes utilisés, la déformation du front d'onde vue par les atomes sera ainsi réduite. L'avantage du condensat de Bose-Einstein est donc son faible étalement spatial ainsi qu'un taux d'expansion réduit par rapport aux nuages d'atomes thermiques.

### Amélioration de la sensibilité

Comme on l'a vu dans la section 1.1.1, la sensibilité des interféromètres dépend de la surface contenue entre les trajectoires de leurs deux bras. Si l'on veut augmenter celle-ci, on doit donc augmenter cette surface. Il existe deux possibilités pour réaliser cela. En effet, une première option consiste à disposer de temps d'interrogation plus longs. Une deuxième solution est d'augmenter la différence de vitesse transférée aux atomes lors des impulsions lasers. Ceci peut être réalisé par la technique des séparatrices à large transfert d'impulsion (LMTBS, Large Momentum Transfer Beamsplitter).

Différentes approches ont été proposées afin de réaliser des interféromètres à LMT (Large Momentum Transfer). La première technique consiste à appliquer une séquence d'impulsions  $\pi$  effectuées grâce à des transitions Raman à deux photons. En effet, les impulsions supplémentaires sont effectuées en changeant le sens de propagation des deux lasers. De cette façon, une impulsion  $2\hbar\mathbf{k}$  supplémentaire est transférée aux atomes. Cette approche a permis de réaliser des séparations en impulsion de  $6\hbar\mathbf{k}$  [McGuirk et al., 2000]. Une seconde approche consiste à utiliser des transitions de Bragg d'ordre supérieur. Avec cette solution, une séparatrice (ou un miroir), ainsi qu'un transfert d'impulsion plus important peuvent être réalisés en une seule impulsion. Une séparation de  $24\hbar\mathbf{k}$  a ainsi pu être réalisée [Müller et al., 2008]. Il est aussi possible de mélanger les deux approches précédentes, en utilisant une séquence de transitions de Bragg. Ainsi, chaque séparatrice est constituée de plusieurs impulsions Bragg, transfé-

rant elles-même une impulsion supérieure à  $2\hbar\mathbf{k}$ . Une telle approche a permis d'atteindre une séparation de  $102\hbar\mathbf{k}$  avec des séparatrices constituées de 17 impulsions Bragg transférant  $6\hbar\mathbf{k}$  [Chiov et al., 2011]. Enfin, une dernière approche consiste à utiliser les oscillations de Bloch au sein d'un réseau optique accéléré afin de transmettre des reculs supplémentaires aux atomes [Cladé et al., 2009]. La technique consiste à charger les atomes auxquels on veut transférer de l'impulsion dans un réseau optique. Lorsque le réseau est accéléré, les atomes subissent une force constante et uniforme et donc acquièrent une impulsion qui varie linéairement avec le temps. Cependant, étant donné que l'on ne veut accélérer qu'un seul bras de l'interféromètre, le chargement des atomes dans le réseau Bloch doit dépendre de l'état des atomes dans l'espace des impulsions. Une séparation de  $80\hbar\mathbf{k}$  a été démontrée [McDonald et al., 2013]. C'est cette dernière technique qui a été choisie pour l'expérience  $\hbar/m$  du Laboratoire Kastler Brossel, conjuguée à un schéma de double diffraction, qui permet de doubler la surface de l'interféromètre. En effet, pour réaliser une diffraction de Bragg à l'ordre  $n$ , la puissance laser nécessaire est en  $n^2$ , aussi la technique reposant sur les oscillations de Bloch semble plus prometteuse. Elle est cependant très sensible à la décohérence due aux fluctuations d'intensité.

Dans les deux cas, le nuage d'atomes doit être le plus froid possible si l'on veut réduire la décohérence. Plus les temps d'interrogation sont longs, plus les nuages auront tendance à s'étendre spatialement, changeant ainsi l'efficacité des impulsions lasers, ainsi que l'impulsion communiquée aux atomes. Si l'on veut augmenter l'impulsion transférée aux atomes, on doit disposer de nuages d'atomes très localisés, si l'on veut éviter la décohérence résultant des fluctuations d'intensité.

## 1.2 Condensat de Bose-Einstein comme source pour l'interférométrie

Depuis quelques années, une nouvelle génération d'interféromètres se développe. Ceux-ci utilisent des condensats de Bose-Einstein en tant que sources atomiques, conjointement au développement de nouvelles techniques permettant de gagner en sensibilité. De telles sources possèdent en effet l'avantage de combiner faible étalement spatial et distribution en vitesse étroite. Elles s'avèrent ainsi très adaptées afin de réduire les effets systématiques liés à la courbure des fronts

d'onde, en permettant d'utiliser des faisceaux lasers plus larges et plus puissants. Leur faible dispersion en vitesse ainsi que leur étalement spatial réduit semblent de plus extrêmement adaptés à l'utilisation de nouvelles techniques d'interférométrie très sélectives en vitesse, telles que les séparatrices à large transfert d'impulsion (Large Momentum Transfer Beamsplitter) qui permettent d'augmenter l'impulsion communiquée aux atomes de plusieurs reculs. Enfin, le faible taux d'extension de ce type de sources permet d'envisager des temps d'interrogation beaucoup plus longs (de l'ordre de la seconde). En contrepartie, la forte densité associée à ce type de source oblige à ne plus pouvoir négliger l'effet des interactions entre les atomes. Cet effet sera étudié au chapitre 3.

Nous présentons dans cette section les enjeux pour la physique fondamentale de l'utilisation de telles sources d'atomes ainsi que les expériences récentes ou en cours de développement.

### 1.2.1 Test du principe d'équivalence

L'un des enjeux de l'utilisation de gaz condensés pour l'interférométrie atomique est de repousser la précision sur la mesure de l'accélération de la pesanteur  $g$ , afin de réaliser des tests du principe d'équivalence d'Einstein. En effet, celui-ci repose sur le postulat de l'universalité de la chute libre, dont on peut réaliser un test en mesurant l'accélération acquise par deux corps de structures internes et de masses différentes en chute libre. Il s'agit de tester l'égalité des masses inertielle et gravitationnelle de ces deux corps, constituant le principe d'équivalence faible. Les accélérations mesurées par les deux corps permettent de déduire une valeur du paramètre d'Eötvös, donnant la différence normalisée entre les rapports de masse des deux corps. Celui-ci est donné par :

$$\eta = 2 \frac{\left(\frac{m_g}{m_i}\right)_A - \left(\frac{m_g}{m_i}\right)_B}{\left(\frac{m_g}{m_i}\right)_A + \left(\frac{m_g}{m_i}\right)_B} = 2 \frac{g_A - g_B}{g_A + g_B}, \quad (1.2.1)$$

où  $m_g$  et  $m_i$  représentent les masses gravitationnelle et inertielle de chaque corps  $A$  et  $B$ , et  $g_i$  l'accélération de la pesanteur mesurée pour le corps  $i$ . Toute déviation à l'universalité de la chute libre correspond à une valeur non nulle de  $\eta$ . Les meilleures limites actuelles sur les violations du principe d'équivalence contraignent le paramètre d'Eötvös à des valeurs inférieures à  $10^{-13}$ . Une expé-



rience avec un pendule de torsion a mesuré  $\eta = (0,3 \pm 1,8) \times 10^{-13}$  entre deux masses de test en béryllium et en titane [Schlamminger et al., 2008].

Une telle mesure peut être réalisée par interférométrie atomique, en réalisant une mesure simultanée de l'accélération ressentie par deux espèces atomiques différentes laissées en chute libre. De telles mesures ont déjà été réalisées mais n'ont pour l'instant pas atteint la sensibilité nécessaire pour mesurer de quelconques déviations, les précisions données n'étant que de l'ordre de  $10^{-7}$  [Fray et al., 2004, Schlippert et al., 2014, Tarallo et al., 2014]. Afin de tester le principe d'équivalence au-delà de  $10^{-13}$ , il est impératif de disposer d'un gravimètre extrêmement sensible. On doit donc disposer de temps de chute libre importants, de l'ordre de la seconde. Une première démonstration expérimentale d'un interféromètre simultané utilisant des nuages de  $^{85}\text{Rb}$  et de  $^{87}\text{Rb}$  condensés a été réalisée [Kuhn et al., 2014]. Deux expériences ont pour objectif de réaliser des tests du principe d'équivalence grâce à l'interférométrie atomique à partir de condensats de Bose-Einstein, toutes deux prévoient des hauteurs de chute de 10 mètres. Il s'agit des expériences de Mark Kasevich à Stanford et d'Ernst Rasel à Hanovre. Pour de tels temps d'interrogation, l'utilisation de nuages d'atomes condensés est impérative. En effet, l'expansion spatiale importante des nuages d'atomes thermiques laissés en chute libre pendant de telles durées serait à l'origine d'une forte décohérence lors des séparatrices et miroirs.

## Expérience de Stanford

Le groupe de Mark Kasevich à Stanford a réalisé une fontaine de 10 m, dont l'objectif est d'atteindre une sensibilité de l'ordre de  $10^{-15}$  sur  $\eta$  [Sugarbaker, 2014]. Ceci pourra être réalisé en mesurant l'accélération ressentie par les deux isotopes 85 et 87 du rubidium laissés en chute libre.

Le dispositif expérimental réalisé consiste en un tube à ultra-vide de 9 m de long, autour duquel une bobine de compensation permet de générer un champ de biais. L'ensemble est positionné à l'intérieur de trois couches de blindage magnétique, permettant d'isoler la zone interférométrique des champs parasites à des valeurs inférieures à 1 mG. La préparation des sources atomiques est réalisée grâce à un piège magnéto-optique, puis une évaporation par un couteau micro-onde au sein d'un piège quadropolaire. Un refroidissement supplémentaire est réalisé en effectuant une séquence de focalisation magnétique dans un piège

TOP (Time-Orbiting Potential). Cette technique repose sur un principe similaire à celle du  $\delta$ -kick cooling [Ammann and Christensen, 1997], qui correspond à l'allumage très bref d'un piège harmonique. Ici, un piège très étroit (d'à peu près 5 Hz) est allumé pendant une centaine de millisecondes de sorte que le nuage d'atomes ait le temps de se thermaliser à l'intérieur [Monroe et al., 1990]. Il est ainsi possible de générer deux sources d'atomes : d'une part un nuage de rayon 200  $\mu\text{m}$  composé de  $4 \times 10^6$  atomes à 50 nK ou bien un paquet atomique de rayon 30  $\mu\text{m}$  avec  $10^5$  atomes à une température de 3 nK, si l'on insère la phase d'évaporation avant la focalisation magnétique.

Une fois les nuages d'atomes préparés, l'interféromètre, de type Mach-Zehnder, est réalisé. Ceux-ci sont lancés vers le haut du tube, grâce à un réseau optique permettant de transférer une accélération de 75  $g$  aux atomes, correspondant à 2386 reculs. Les séparatrices atomiques sont réalisées en effectuant des transitions Raman entre les niveaux hyperfins  $|F = 2\rangle$  et  $|F' = 3\rangle$  de la raie  $D_2$  du rubidium. Le miroir, d'une durée de 70  $\mu\text{s}$ , est appliqué lorsque les atomes sont au sommet de leur trajectoire, permettant un temps d'interrogation  $T$  de 1,15 s. Pour chaque tir, une sensibilité de  $6,7 \times 10^{-12} g$  a été démontrée en utilisant la source la plus froide. Cette sensibilité sur l'accélération amène à une sensibilité sur le rapport d'Eötvös de l'ordre de  $10^{-13}$  à une heure d'intégration. Une sensibilité de  $10^{-15}$  serait alors obtenue à un mois d'intégration. C'est pour cela que l'objectif visé est d'implémenter des LMTBS permettant de communiquer 100 reculs aux atomes lors des impulsions  $\pi/2$ . Grâce à cela, une précision de l'ordre de  $3 \times 10^{-15}$  sur  $\eta$  est prévue.

### Expérience de Hanovre

L'expérience VLBAI (Very Long Baseline Atom Interferometry), en cours de construction au Hanover Institute of Technology, a pour objectif d'obtenir une précision inférieure à  $10^{-13}$  sur le rapport d'Eötvös. Pour cela, l'accélération d'atomes de rubidium et d'ytterbium en chute libre sera mesurée.

Le dispositif expérimental réalisé comprendra deux chambres permettant de préparer chacune des espèces atomiques en vue de réaliser la séquence interférométrique. Celle-ci sera réalisée au sein d'un tube ultra-vide de 10 m de longueur. Un blindage magnétique sur une portion de 9 m permettra de s'affranchir des champs magnétiques parasites lors de la réalisation de l'interféromètre. La confi-

guration de l'interféromètre correspond à un Mach-Zehnder. Deux configurations sont possibles : soit les atomes sont lâchés en chute libre depuis le haut du tube, soit ils sont lancés depuis le bas du dispositif et décrivent une trajectoire parabolique avant de retomber. Cette dernière configuration permet de doubler le temps total de l'interféromètre, correspondant à  $2T = 2,6$  s, tandis que dans la première configuration, celui-ci correspondrait à 1 à 1,3 s. Les séparatrices pour les deux espèces atomiques seront réalisées par des transitions Bragg, couplant les états externes des deux espèces à leurs états fondamentaux respectifs.

L'objectif pour chacune des sources d'atomes consiste à réaliser un condensat de Bose-Einstein. Un ralentissement supplémentaire des atomes, par la technique du delta-kick cooling, est prévu de façon à geler davantage leur expansion. De plus, un meilleur contrôle de la distribution en vitesse des nuages permettrait de s'affranchir des effets de courbure du front d'onde. Afin d'atteindre l'objectif fixé sur la détermination du paramètre d'Eötvös, le dispositif doit pouvoir générer deux condensats de  $10^5$  atomes d'ytterbium et  $2 \cdot 10^5$  atomes de rubidium en 10 s.

### 1.2.2 Test de l'électrodynamique quantique

L'expérience  $h/m$  du Laboratoire Kastler Brossel a pour objectif de réaliser un test de l'électrodynamique quantique (QED), en mesurant le rapport  $h/m_{\text{Rb}}$ , où  $h$  est la constante de Planck et  $m_{\text{Rb}}$  la masse de l'atome de rubidium 87. Ce rapport intervient dans la détermination de la constante de structure fine  $\alpha$ . Cette mesure est réalisée grâce à un interféromètre de Ramsey-Bordé, au centre duquel les atomes sont accélérés par la technique des oscillations de Bloch. Nous allons dire quelques mots concernant ce test et la mesure de  $\alpha$  réalisée grâce à cette technique.

La constante de structure fine  $\alpha$  a été introduite par Sommerfeld en 1916 afin d'expliquer la structure fine de l'atome d'hydrogène. Il s'agit d'une constante sans dimension qui donne le rapport entre la vitesse de l'électron dans la première orbite de Bohr  $v_e$  et la vitesse de la lumière  $c$ . Elle s'écrit :

$$\alpha = \frac{v_e}{c} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}, \quad (1.2.2)$$

où  $e$  est la charge de l'électron,  $\epsilon_0$  la permittivité du vide et  $\hbar$  la constante de Planck réduite.

Sommerfeld ne parvint pas à décrire précisément la structure fine de l'hydrogène. Ce n'est que par l'introduction de l'équation de Dirac en 1928 que celle-ci put être expliquée, grâce à l'introduction du degré de liberté de spin. Celui-ci induit un moment magnétique intrinsèque qui est couplé au champ électromagnétique. Ce moment est donné par :

$$\boldsymbol{\mu}_S = -g_e \mu_B \frac{\mathbf{S}}{\hbar}, \quad (1.2.3)$$

avec  $g_e$  le facteur de Landé et  $\mu_B = e/(2m_e)$  le magnéton de Bohr. L'équation de Dirac permet de déterminer  $g_e = 2$ . Kusch et Foley [Kusch and Foley, 1948] ont découvert en 1947 que la valeur de celui-ci était légèrement plus élevée que la valeur obtenue à partir de l'équation de Dirac, grâce à la mesure précise de la structure hyperfine du gallium. L'anomalie du moment magnétique de l'électron a ainsi été introduite. Celle-ci est donnée par :

$$a_e = \frac{g_e - 2}{2}. \quad (1.2.4)$$

En 1949, Schwinger calcula une correction en  $\alpha/\pi$  à appliquer au facteur de Landé de l'électron [Schwinger, 1948]. Avec les développements de l'électrodynamique quantique, l'anomalie du moment magnétique de l'électron s'exprime de la façon suivante :

$$a_e = C_1 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + C_2 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + C_3 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + \dots \quad (1.2.5)$$

Dans cette expression, ne figurent que les contributions dues à la QED, d'autres contributions, de l'ordre de  $10^{-9}$  et en-dessous, sont présentes. Elles correspondent aux contributions des muons, des taus, de l'interaction faible et des hadrons. Le calcul des coefficients de l'expression (1.2.5) devient extrêmement complexe avec l'ordre de  $\alpha$ . Le calcul du coefficient  $C_5$  a été réalisé par Kinoshita en 2012 [Aoyama et al., 2012], en utilisant 12672 diagrammes de Feynman.

Une valeur de la constante de structure fine peut être obtenue à partir de la mesure du rapport  $h/m$  par interférométrie atomique. En effet, la constante de Rydberg est donnée par :

$$R_\infty = \frac{m_e c^2}{2hc} \alpha^2. \quad (1.2.6)$$

Etant donné que la constante de Rydberg est connue avec une incertitude de

$5 \times 10^{-12}$ , il faut une valeur de  $h/m_e$  pour obtenir une valeur de  $\alpha$ . En passant par les rapports de masse  $m/m_p$  ( $m_p$  correspond à la masse du proton) et  $m_p/m_e$ , qui sont connus avec des incertitudes respectives de  $1,4 \times 10^{-10}$  (pour le rubidium) et  $9,5 \times 10^{-11}$ , on peut réécrire :

$$\alpha^2 = \frac{2R_\infty}{c} \frac{m}{m_p} \frac{m_p}{m_e} \frac{h}{m}, \quad (1.2.7)$$

où l'on voit que la mesure du rapport  $h/m$  permet de déterminer une valeur de  $\alpha$ . Il s'agit de plus d'une mesure indépendante de la QED. Un test de QED peut alors être effectué en comparant la valeur expérimentale de  $a_e$  avec celle calculée en utilisant la valeur de  $\alpha$  déterminée grâce à la valeur mesurée de  $h/m$ . Ce test réalisé avec une valeur de  $\alpha$ , d'incertitude relative de  $6,6 \times 10^{-10}$ , déterminée en 2011 [Bouchendira et al., 2011] est le test le plus précis de QED.

Pour la mesure précédente, l'effet systématique lié à la phase de Gouy et la courbure des fronts d'onde correspond à une incertitude relative de l'ordre de  $3 \times 10^{-10}$  sur la valeur de  $\alpha$ . C'est pourquoi une source d'atomes condensés présenterait là encore un avantage certain afin de réduire d'un ordre de grandeur cet effet systématique. De plus, une telle source s'avère particulièrement adaptée à l'implémentation des LMTBS par la technique des oscillations de Bloch. En effet, il s'agit d'une technique extrêmement sensible en vitesse, donc une distribution en vitesse plus fine paraît être une solution afin d'augmenter la cohérence de telles séparatrices.

**Conclusion** Dans ce chapitre, nous avons présenté l'interférométrie atomique avec des impulsions lasers. Nous avons présenté l'intérêt de l'utilisation d'atomes condensés pour augmenter la sensibilité et réduire les effets systématiques dus à la courbure des fronts d'onde. Nous avons ensuite présenté les enjeux de la nouvelle génération d'interféromètres utilisant de tels nuages d'atomes, ainsi que des exemples d'expériences en cours de fonctionnement ou en construction.

## Chapitre 2

# Condensation de Bose-Einstein

Le phénomène de condensation de Bose-Einstein, prédit par Albert Einstein en 1925, se produit lorsqu'un ensemble macroscopique de bosons, particules dont le spin total est entier, vient s'accumuler dans l'état fondamental du système. Le gaz, constitué d'un nombre macroscopique de particules, toutes dans l'état fondamental, acquiert alors des propriétés quantiques. En effet, le gaz dans sa totalité peut alors être décrit par une fonction d'onde macroscopique. Ce phénomène se produit lorsque les fonctions d'onde des différentes particules du système se recouvrent, c'est-à-dire lorsque leur longueur d'onde de de Broglie  $\lambda_{dB}$  est du même ordre de grandeur que la distance séparant les particules du gaz. Cette condition est donc remplie lorsque  $\lambda_{dB} \approx n^{-1/3}$  avec  $\lambda_{dB} = \sqrt{2\pi\hbar^2/(mk_B T)}$ , où  $n$  est la densité spatiale du gaz,  $T$  la température,  $m$  la masse de l'atome et  $k_B$  la constante de Boltzmann. Le phénomène se produit donc pour des températures très basses.

Nous décrivons dans ce chapitre le phénomène de la condensation de Bose-Einstein. Nous présentons tout d'abord la condensation de Bose-Einstein pour un gaz parfait au sein d'un piège harmonique. Nous montrons dans un premier temps l'existence d'une température critique en-dessous de laquelle la condensation se produit. Puis nous donnons les équations permettant de modéliser l'effet des interactions entre les atomes du condensat. Nous introduisons ensuite le refroidissement dissipatif, et le principe de l'évaporation qui permettent la réalisation expérimentale de la condensation.

## 2.1 La condensation de Bose-Einstein

### 2.1.1 Condensation de Bose-Einstein dans un piège harmonique

On considère un gaz de  $N$  bosons à la température  $T$  confinés dans un potentiel de piégeage harmonique  $V(\mathbf{r})$ , à 3 dimensions. On considère de plus que le gaz est suffisamment dilué pour que l'on puisse considérer qu'il n'y a pas d'interactions entre les particules le constituant. Le potentiel de piégeage est donné par :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2). \quad (2.1.1)$$

Les niveaux d'énergie des états associés aux nombres quantiques  $n_x$ ,  $n_y$  et  $n_z$ , décrivant les niveaux d'énergie au sein du potentiel harmonique, s'écrivent :

$$\epsilon_{n_x, n_y, n_z} = \hbar(n_x \omega_x + n_y \omega_y + n_z \omega_z), \text{ avec } n_x, n_y, n_z = 0, 1, \dots \quad (2.1.2)$$

L'énergie du niveau fondamental, correspondant à  $n_x = n_y = n_z = 0$ , est prise nulle, on a donc  $\epsilon_{0,0,0} = 0$ . La probabilité d'occupation de l'état associé à  $n_x, n_y, n_z$  est donnée par la distribution de Bose-Einstein :

$$f_{BE}(\epsilon_{n_x, n_y, n_z}) = \frac{1}{\exp(\beta(\epsilon_{n_x, n_y, n_z} - \mu)) - 1}, \quad (2.1.3)$$

avec  $\beta = 1/(k_B T)$  où  $k_B$  est la constante de Boltzmann, et où  $\mu$  correspond au potentiel chimique du gaz. On peut noter que dans la limite des hautes températures, cette fonction tend vers la distribution classique de Maxwell-Boltzmann :

$$f_{MB}(\epsilon) = e^{-\beta(\epsilon - \mu)}. \quad (2.1.4)$$

Le nombre total de particules du gaz est donné par :

$$N = \sum_{n_x, n_y, n_z} N_{n_x, n_y, n_z} = \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{z}{\exp(\beta \epsilon_{n_x, n_y, n_z}) - z}, \quad (2.1.5)$$

où l'on a introduit la fugacité  $z = \exp(\beta \mu)$ . Etant donné que  $e^{\beta \epsilon_{0,0,0}} = 1$ , et que le nombre d'atomes dans l'état fondamental ne peut pas être négatif, on a

$0 \leq z < 1$ . On aura ainsi :

$$N = N_0 + \sum_{n_x, n_y, n_z \neq 0} \frac{z}{\exp(\beta \epsilon_{n_x, n_y, n_z}) - z}, \quad (2.1.6)$$

où  $N_0$  est le nombre d'atomes dans l'état fondamental. Celui-ci est donné par  $N_0 = z/(1 - z)$ . Etant donné que  $z$  ne peut pas prendre de valeur supérieure à 1, le nombre d'atomes dans les états excités est borné par  $N_{\max}$ , correspondant à  $z = 1$  :

$$N_{\max} = \sum_{n_x, n_y, n_z \neq 0} \frac{1}{\exp(\beta \epsilon_{n_x, n_y, n_z}) - 1}. \quad (2.1.7)$$

Dans le cas où la valeur de  $N_{\max}$  est finie, il est donc possible de saturer les états excités. Si l'on garde  $T$  et  $V$  constants, tout atome ajouté au système viendra se condenser dans l'état fondamental.

### Température critique

Plutôt que d'augmenter  $N$  en fixant  $T$  et  $V$ , la condensation peut être obtenue en faisant varier  $T$  en laissant  $N$  et  $V$  constants. Si le système est suffisamment grand pour que l'on puisse considérer la séparation entre les différents niveaux du piège négligeable devant  $k_B T$ , on peut remplacer la somme par une intégrale, et l'on a :

$$N = N_0 + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{z e^{-\beta \epsilon_{n_x, n_y, n_z}}}{1 - z e^{-\beta \epsilon_{n_x, n_y, n_z}}} dn_x dn_y dn_z. \quad (2.1.8)$$

Etant donné que  $z$  et  $e^{-\beta \epsilon_{n_x, n_y, n_z}}$  sont inférieurs à 1, on peut développer l'expression dans l'intégrale comme :

$$\frac{z e^{-\beta \epsilon_{n_x, n_y, n_z}}}{1 - z e^{-\beta \epsilon_{n_x, n_y, n_z}}} = \sum_{l=1}^{\infty} (z e^{-\beta \epsilon_{n_x, n_y, n_z}})^l. \quad (2.1.9)$$

L'intégration de l'expression (2.1.8) nous donne ainsi :

$$N = N_0 + \frac{g_3(z)}{\beta^3 \hbar^3 \omega^3}, \quad (2.1.10)$$

où la fonction  $g_3(z)$  est une fonction faisant partie de la famille des fonctions polylogarithmes, définies par  $g_n(z) = \sum_{l=1}^{\infty} z^l / l^n$  et où l'on a introduit la pulsation



moyenne géométrique du piège  $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ . Pour  $T = T_c$ , tous les atomes se répartissent dans les états excités, on a ainsi  $N_0 \ll N$ . De plus, le nombre d'atomes dans les états excités est maximal pour  $z = 1$ , et donc pour  $\mu = 0$ . On obtient ainsi la température critique qui est donnée par :

$$T_c = \frac{\hbar \bar{\omega}}{k_B} \left( \frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3} \simeq 0,94 \frac{\hbar \bar{\omega}}{k_B} N^{1/3}, \quad (2.1.11)$$

où l'on a utilisé le fait que  $g_n(1) = \zeta(n)$  avec  $\zeta(n)$  la fonction zêta de Riemann. La température critique  $T_c$  correspond au seuil de température en-dessous duquel la condensation a lieu. Quand la température diminue, le nombre d'atomes dans l'état fondamental augmente jusqu'à devenir macroscopique. L'expression (2.1.10) nous permet d'obtenir la dépendance de la fraction d'atomes condensés avec la température, en-dessous de la température critique :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^3. \quad (2.1.12)$$

Ici, on n'a pas pris en compte les interactions s'appliquant entre les atomes constituant le gaz. Celles-ci ont pour effet de déplacer la température de transition. Cependant, ce déplacement est faible et ne constitue que quelques pourcents de  $T_c$  [Pilati et al., 2008]. La formule (2.1.11) donne ainsi un bon ordre de grandeur de la température critique du système.

### Fonction d'onde macroscopique

Le phénomène de condensation, comme on l'a vu, correspond à l'accumulation des atomes du nuage dans l'état fondamental du piège. Ce système de  $N$  bosons indiscernables peut être décrit, dans le cas où l'on néglige les interactions, par une fonction d'onde à  $N$  particules correspondant au produit des  $N$  fonctions d'onde à 1 corps :

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^N \Phi(\mathbf{r}_i). \quad (2.1.13)$$

La densité spatiale du nuage sera alors donnée par :

$$n(\mathbf{r}) = N |\Phi(\mathbf{r})|^2. \quad (2.1.14)$$

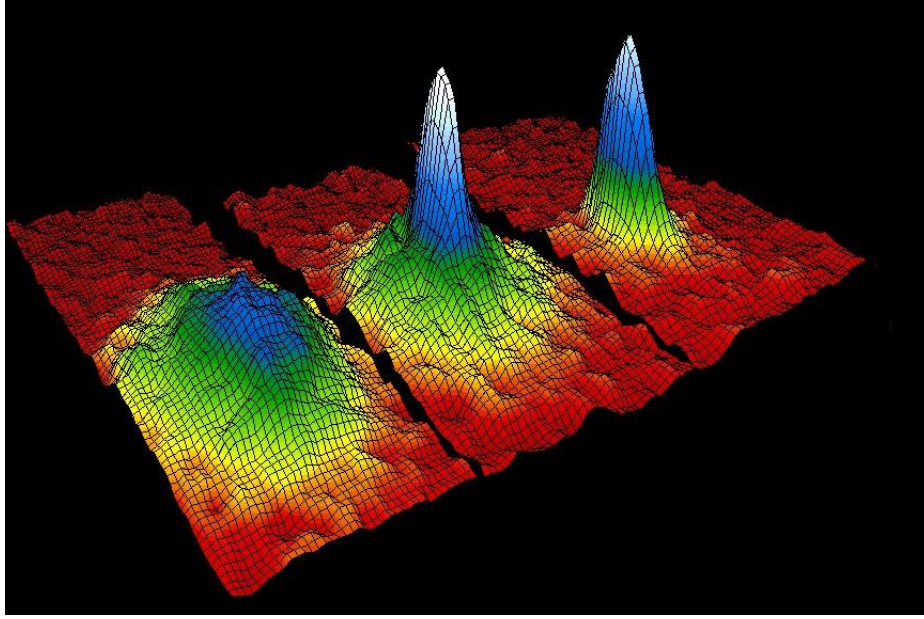


Fig. 2.1 *Distribution spatiale du nuage d'atomes à différentes températures (de gauche à droite : 400 nK, 200 nK et 50 nK). Plus la température diminue, plus la fraction d'atomes non condensés diminue. On voit donc apparaître le pic signant la présence du condensat, et le nuage d'atomes thermiques autour de lui s'efface progressivement. (Figure extraite de [Anderson et al., 1995])*

Dans le cas du piège harmonique de pulsation moyenne  $\bar{\omega}$ , la fonction d'onde individuelle  $\Phi(\mathbf{r})$  du fondamental est donnée par :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \left( \frac{1}{\sqrt{\pi} a_{\text{oh}}} \right)^{3/2} \exp \left( - \sum_i \frac{r_i^2}{2a_i^2} \right), \quad (2.1.15)$$

avec  $a_i = \sqrt{\hbar/m\omega_i}$  pour  $i = x, y, z$  et  $a_{\text{oh}} = (a_x a_y a_z)^{1/3}$ . Cette description permet de rendre compte de la fraction condensée d'atomes dans le nuage. Si l'on n'est pas à température nulle,  $N_0 < N$ , et il reste une fraction d'atomes thermiques. La distribution spatiale du nuage sera ainsi constituée d'un pic central, dont la largeur ne dépend pas de  $N$  et donc de  $T$ , correspondant à la fraction condensée, entouré d'un nuage d'atomes thermiques dont la largeur, elle, dépend de la température. La présence de ce pic central dans la distribution spatiale du gaz constitue la signature de la condensation de Bose-Einstein de celui-ci.

### 2.1.2 Effet des interactions : équation de Gross-Pitaevskii

On considère maintenant un système constitué de  $N$  bosons interagissant, piégés dans un potentiel  $V_{\text{piège}}(\mathbf{r})$ . Dans l'approximation du champ moyen, la fonction d'onde à  $N$  corps du condensat correspond au produit tensoriel des  $N$  fonctions d'onde à un corps décrivant chacun des atomes :

$$|\Psi\rangle = |\Phi(1)\rangle \otimes |\Phi(2)\rangle \otimes \dots \otimes |\Phi(N)\rangle. \quad (2.1.16)$$

L'Hamiltonien du système à  $N$  corps s'écrit :

$$H = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\mathbf{P}_i^2}{2m} + V_{\text{piège}}(\mathbf{r}) \right) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (2.1.17)$$

où le dernier terme rend compte des interactions à deux corps. Lorsque l'on suppose le gaz dilué ( $n|a|^3 \ll 1$ , avec  $a$  la longueur de diffusion de l'onde  $s$ ), les atomes sont essentiellement loin les uns des autres, et l'on peut modéliser l'interaction entre deux atomes par une fonction delta. Le pseudo-potentiel obtenu peut être écrit [Cohen-Tannoudji and Guéry-Odelin, 2011] :

$$V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = g\delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \text{ avec } g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}, \quad (2.1.18)$$

où  $a$  est la longueur de diffusion de l'onde  $s$ . L'Hamiltonien décrivant le système avec interactions peut ainsi se réécrire :

$$H = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\mathbf{P}_i^2}{2m} + V_{\text{piège}}(\mathbf{r}) \right) + g \sum_{i < j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (2.1.19)$$

L'énergie totale du système est donnée par :

$$E = N \int d^3r \Phi^*(\mathbf{r}) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{piège}}(\mathbf{r}) + \frac{(N-1)g}{2} |\Phi(\mathbf{r})|^2 \right) \Phi(\mathbf{r}). \quad (2.1.20)$$

Cette énergie est minimisée grâce à la méthode variationnelle décrite dans [Cohen-Tannoudji and Guéry-Odelin, 2011], ce qui permet d'aboutir à l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) + V_{\text{piège}}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) + (N-1)g |\Phi(\mathbf{r})|^2 \Phi(\mathbf{r}) = \mu \Phi(\mathbf{r}), \quad (2.1.21)$$

avec  $\mu$  le potentiel chimique du gaz. Celle-ci correspond à une équation de Schrödinger à laquelle s'ajoute un terme non-linéaire rendant compte des interactions entre atomes. Il correspond au potentiel effectif subi par un atome et créé par les  $N - 1$  autres atomes, il s'agit donc d'un terme de champ moyen d'interactions. Dans la limite où le nombre d'atomes est suffisamment grand ( $N \gg 1$ ), on peut remplacer  $N - 1$  par  $N$  dans l'équation précédente.

Afin de décrire l'évolution temporelle du condensat, une équation similaire peut être obtenue. Il s'agit de l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps :

$$i\hbar \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{\text{piège}}(\mathbf{r}, t) + Ng|\Phi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Phi(\mathbf{r}, t). \quad (2.1.22)$$

Si le potentiel  $V_{\text{piège}}(\mathbf{r}, t)$  ne dépend pas du temps, une solution stationnaire de la forme  $\phi(\mathbf{r}, t) = \phi_0(\mathbf{r}) \exp(-i\mu t/\hbar)$  permet de retrouver l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire. Cette description en champ moyen d'interactions est valable tant que la longueur de diffusion  $a$  reste faible devant la distance caractéristique séparant les atomes, c'est-à-dire dans la limite  $na^3 \ll 1$ , avec  $n = N|\Phi|^2$  la densité d'atomes [Dalibard, 2008]. Cette condition n'implique pas forcément que le rôle des interactions est négligeable. En effet, on peut comparer l'énergie d'interactions avec l'énergie cinétique du condensat  $E_{\text{int}}/E_{\text{cin}} \sim Na/a_{\text{oh}}$  [Dalfovo et al., 1999], qui nous indique que même dans le cas où la condition sur  $na^3$  est remplie, l'énergie des interactions peut prédominer.

On peut étendre cette description au cas du condensat à deux composantes, qui nous servira dans le chapitre 3 pour étudier l'influence du terme d'interactions sur un interféromètre atomique. Avec  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  correspondant aux deux espèces formant le condensat, on a le système suivant [Ballagh et al., 1997] :

$$i\hbar \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_1 + Ng_{11}|\Phi_1|^2 + Ng_{12}|\Phi_2|^2 \right) \Phi_1, \quad (2.1.23)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_2 + Ng_{21}|\Phi_1|^2 + Ng_{22}|\Phi_2|^2 \right) \Phi_2. \quad (2.1.24)$$

Les constantes d'interaction sont données par  $g_{ij} = 4\pi\hbar^2 a_{ij}/m$ , qui dépendent des longueurs de diffusion d'une même espèce,  $a_{11}$  et  $a_{22}$ , et entre les deux espèces avec  $a_{12} = a_{21}$ .

## 2.2 Refroidissement évaporatif au sein d'un piège conservatif

Dans cette section, nous présentons la technique de refroidissement qui permet d'atteindre la condensation de Bose-Einstein, nous en déduisons les lois d'échelle qui gouvernent l'évolution du nombre d'atomes ainsi que la densité dans l'espace des phases du gaz. Nous détaillons ensuite le principe de l'évaporation au sein d'un piège dipolaire croisé.

Le refroidissement par évaporation est à l'origine de l'obtention des premiers condensats [Anderson et al., 1995, Davis et al., 1995]. Le principe consiste à se servir des collisions élastiques entre atomes confinés dans un piège conservatif (magnétique ou optique) afin d'éliminer du piège les atomes les plus énergétiques. Après rethermalisation, la température du gaz diminue jusqu'à tendre vers une valeur d'équilibre dépendant de la profondeur du piège  $U_0$ . On peut de plus forcer l'évaporation en diminuant progressivement la profondeur du piège. Il est ainsi possible d'atteindre des températures plus basses que la limite de refroidissement dissipatif, au prix d'une perte importante d'atomes au sein du piège. Nous traiterons plus particulièrement du cas d'un piège dipolaire optique, qui permet d'atteindre des temps d'évaporation plus courts que les pièges magnétiques.

### 2.2.1 Lois d'échelle pour un piège harmonique

Un modèle simple permet de déduire les lois d'échelle correspondant à l'évaporation. On décompose ainsi le processus complet en évaporations élémentaires. Considérons  $N$  atomes piégés dans un piège harmonique de profondeur  $U_0$ . L'énergie totale du gaz est donnée par  $E = 3Nk_B T$ . L'énergie perdue au cours de l'évaporation sera donnée par :

$$dE = 3k_B T dN + 3Nk_B dT. \quad (2.2.1)$$

L'évaporation va avoir pour effet d'éliminer les atomes dont l'énergie est supérieure à l'énergie  $\eta k_B T$ , où  $\eta = U_0/k_B T$  est le paramètre qui compare la profondeur du piège à l'énergie thermique moyenne. L'énergie moyenne des atomes perdus est légèrement supérieure à cette énergie de coupure, et est donnée par  $(\eta + \kappa)k_B T$ , où  $\kappa$  est un facteur sans dimension de l'ordre de 1 [Cohen-Tannoudji,

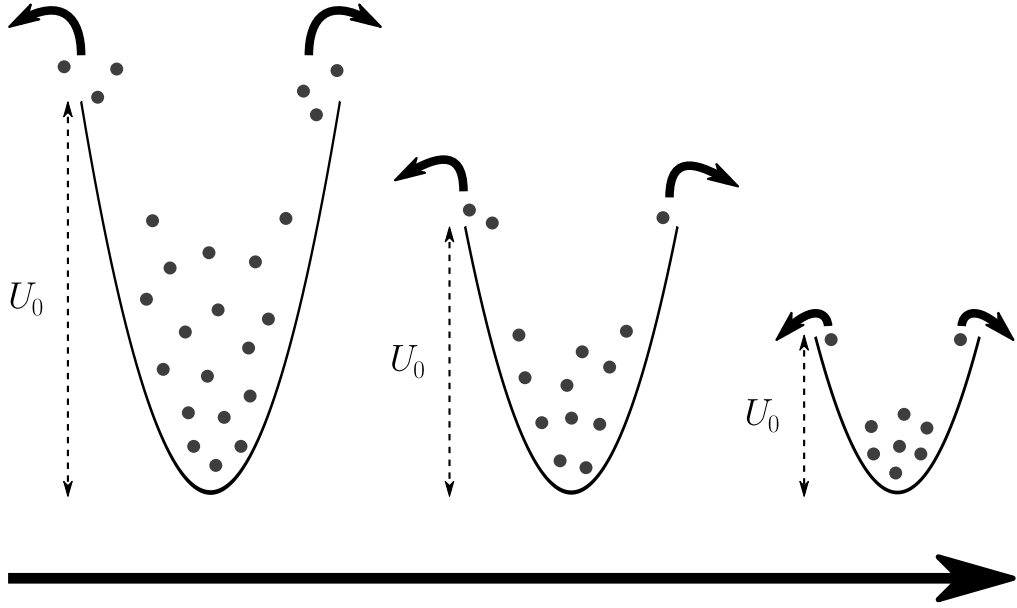


Fig. 2.2 Principe du refroidissement par évaporation. La profondeur du piège est abaissée de sorte que les atomes les plus énergétiques puissent s'en échapper. Le gaz peut alors se rethermaliser à une température inférieure à la température initiale.

1997]. La variation d'énergie totale engendrée par l'évaporation sera donc donnée par :

$$dE = (\eta + \kappa) k_B T dN. \quad (2.2.2)$$

Ainsi, en égalant les deux expressions (2.2.1) et (2.2.2), on obtient :

$$\frac{dT}{T} = \alpha \frac{dN}{N}, \quad (2.2.3)$$

avec  $\alpha = (\eta + \kappa)/3 - 1$ . L'intégration de l'expression précédente permet d'obtenir :

$$\frac{T_f}{T_i} = \left( \frac{N_f}{N_i} \right)^\alpha, \quad (2.2.4)$$

On dispose ainsi de la loi d'échelle reliant la perte d'atomes du piège et la température à laquelle se rethermalise le gaz. On peut déduire une loi d'échelle équivalente pour la densité dans l'espace des phases  $D$  au centre du piège, qui est donnée par :

$$\frac{D_f}{D_i} = \left( \frac{N_f}{N_i} \right)^{1-3\alpha}. \quad (2.2.5)$$

Le principe du refroidissement évaporatif consiste à répéter ce processus élémentaire. Pour que cela soit efficace, le taux de collisions élastiques ne doit pas décroître au fur et à mesure des itérations. Celui-ci est donné par [Dalibard, 2008] :

$$\gamma = \frac{m\bar{\omega}^3 \sigma}{2\pi^2 k_B} \frac{N}{T}, \quad (2.2.6)$$

avec  $\sigma$  la section efficace de collision. Si l'on veut qu'à chaque étape l'évaporation devienne plus efficace, le taux de collisions doit augmenter. On doit donc avoir  $d\gamma \geq 0$ , ce qui revient à la condition :

$$\left| \frac{dT}{T} \right| \geq \left| \frac{dN}{N} \right|, \quad (2.2.7)$$

ce qui nous donne finalement la condition d'emballlement de l'évaporation  $\alpha \geq 1$ . En effet, dans ce régime, la densité du gaz augmente, donc le taux de collisions élastiques augmente au fur et à mesure. Cette augmentation de la probabilité de collisions élastiques entre les atomes renforce ainsi l'efficacité de l'évaporation.

## 2.2.2 Piège dipolaire optique

Le refroidissement évaporatif du gaz peut être réalisé en confinant les atomes dans un piège magnétique ou optique. Le piège optique présente l'avantage que le taux de collision par rapport à un piège magnétique est beaucoup plus important. Cela permet ainsi d'obtenir des temps de refroidissement bien plus courts par rapport à ces derniers. De tels pièges sont réalisés en utilisant un laser très désaccordé par rapport à la transition atomique, de façon à réaliser un piège non dissipatif. Comme nous le verrons, l'utilisation d'un seul faisceau afin de piéger les atomes a pour conséquence une forte anisotropie. Cependant, deux faisceaux lasers peuvent être croisés afin de compenser celle-ci, et générer un piège harmonique beaucoup plus isotrope.

### Potentiel dipolaire créé par un faisceau

La structure interne des atomes est modélisée par un système à deux niveaux, séparés par l'énergie  $\hbar\omega_0$ . En présence d'un champ électromagnétique de pulsation  $\omega_L$ , un atome subit la force dipolaire. Dans le cas où  $\omega_L$  est très éloignée de  $\omega_0$ , cette force n'est pas dissipative et dérive du potentiel dipolaire qui est donné

par [Grimm et al., 2000] :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \frac{\Gamma}{\Delta} I(\mathbf{r}), \quad (2.2.8)$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide,  $\Gamma$  la largeur naturelle de la transition,  $I(\mathbf{r})$  l'intensité lumineuse au point  $\mathbf{r}$  et  $\Delta$  est donné par :

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\omega_L - \omega_0} - \frac{1}{\omega_L + \omega_0}. \quad (2.2.9)$$

On considère tout d'abord un unique faisceau gaussien focalisé sur les atomes, de puissance  $P$ , de col  $w_0$  et se propageant dans la direction  $x$ . Son intensité est donnée par :

$$I(\mathbf{r}) = \frac{2P}{\pi w^2(x)} e^{-2\frac{y^2+z^2}{w^2(x)}}, \quad (2.2.10)$$

avec  $w(x) = w_0 \sqrt{1 + (x/z_R)^2}$ , où  $z_R = \pi w_0^2 / \lambda_L$  est la longueur de Rayleigh, et  $\lambda_L$  la longueur d'onde du laser. On peut réécrire l'expression du potentiel dipolaire (2.2.8) grâce à la formule précédente, ce qui nous donne :

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{U_0}{1 + (x/z_R)^2} e^{-2\frac{y^2+z^2}{w^2(x)}} \text{ avec } U_0 = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \frac{\Gamma}{|\Delta|} I_0, \quad (2.2.11)$$

où  $I_0$  est l'intensité au centre du piège, et est donnée par :

$$I_0 = \frac{2P}{\pi w_0^2}. \quad (2.2.12)$$

Dans la limite où les atomes ont une énergie faible devant la profondeur du piège  $U_0$ , on peut développer l'expression de  $U(\mathbf{r})$  autour du centre du piège, c'est-à-dire pour  $r \rightarrow 0$ . Dans cette limite, le piège peut être approximé par un piège harmonique de pulsations données par :

$$\omega_x = \sqrt{\frac{2U_0}{mz_R^2}} \text{ et } \omega_{y,z} = \sqrt{\frac{4U_0}{mw_0^2}}. \quad (2.2.13)$$

En posant  $\omega_\perp \equiv \omega_{y,z}$  et  $\omega_\parallel \equiv \omega_x$ , on a donc :

$$\omega_\parallel = \frac{\lambda_L}{\sqrt{2\pi}w_0} \omega_\perp. \quad (2.2.14)$$



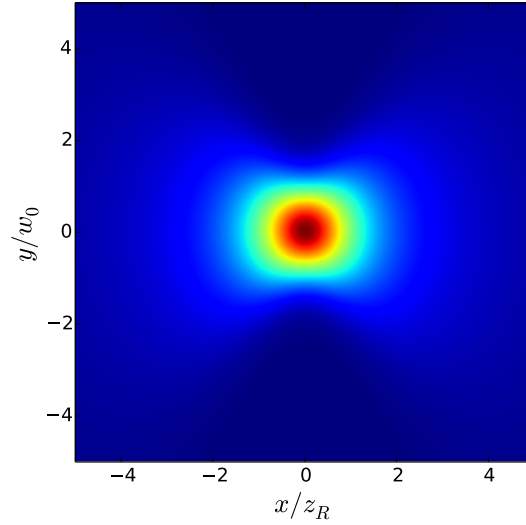


Fig. 2.3 Potentiel dipolaire créé par le faisceau dans le plan  $(x,y)$ . Le rapport entre les deux longueurs caractéristiques du piège  $w_0/z_R$  est de l'ordre de  $4 \cdot 10^{-3}$  pour un col de faisceau  $w_0$  de l'ordre de  $80 \mu\text{m}$  et une longueur d'onde  $\lambda = 1,064 \mu\text{m}$ .

On voit que l'on obtient un piège harmonique anisotrope dont les pulsations des axes propres sont données par  $(\omega_{\parallel}, \omega_{\perp}, \omega_{\perp})$ . Si l'on prend  $\lambda_L = 1,064 \mu\text{m}$ , et un col  $w_0$  de l'ordre de  $90 \mu\text{m}$ , on obtient  $\omega_{\parallel}/\omega_{\perp} \simeq 2,6 \times 10^{-3}$ . Cette anisotropie est donc extrêmement forte. Les atomes sont ainsi confinés dans les deux directions  $y$  et  $z$ , mais peuvent se déplacer le long de la direction  $x$  du faisceau.

### Potentiel dipolaire créé par deux faisceaux croisés

On peut compenser cette anisotropie en croisant le faisceau avec un second faisceau de même puissance  $P$ , selon un angle  $\theta$ , tel que représenté sur la figure 2.4. Le centre du piège ainsi créé est alors situé au niveau de leur point de croisement. Si les polarisations des deux bras sont orthogonales, aucun terme d'interférence n'apparaît dans le calcul du champ et le potentiel dipolaire résultant est uniquement donné par la somme des potentiels créés indépendamment par chacun. Ce potentiel sera « lisse » si les fréquences des deux faisceaux sont légèrement différentes [Perrin, 1998]. On a donc  $U^{(\text{tot})}(\mathbf{r}) = U^{(1)}(\mathbf{r}) + U^{(2)}(\mathbf{r})$  et puisque les deux faisceaux possèdent la même intensité, la profondeur du piège est donnée par  $U_0^{(\text{tot})} = 2U_0$  où  $U_0$  est donné par (2.2.11). Les deux axes propres

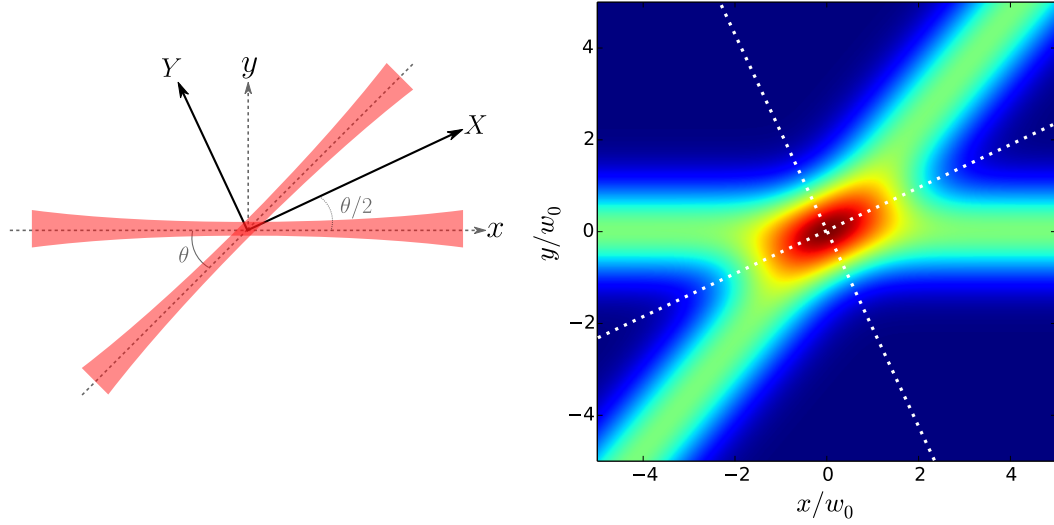


Fig. 2.4 *Gauche : configuration du piège dipolaire avec deux faisceaux croisés. Droite : potentiel créé par les deux faisceaux au centre du piège.*

du piège dans le plan des deux bras sont ainsi ceux résultant d'une rotation de  $\theta/2$  par rapport à  $x$  et  $y$ , l'axe  $z$  restant un axe propre du piège, comme illustré par la figure 2.4. Les pulsations selon ces axes seront ainsi données par :

$$\begin{cases} \omega_X = \sqrt{(1 - \cos \theta)\omega_{\perp}^2 + (1 + \cos \theta)\omega_{\parallel}^2}, \\ \omega_Y = \sqrt{(1 + \cos \theta)\omega_{\perp}^2 + (1 - \cos \theta)\omega_{\parallel}^2}, \\ \omega_z = \sqrt{2}\omega_{\perp}, \end{cases} \quad (2.2.15)$$

où l'on a gardé les mêmes définitions pour  $\omega_{\perp}$  et  $\omega_{\parallel}$  que dans les expressions (2.2.13) et (2.2.14). Les pulsations selon  $X$  et  $Y$  sont représentées en fonction de l'angle créé par les deux faisceaux dans la figure 2.5. On voit que l'on peut obtenir un piège beaucoup moins anisotrope en augmentant l'angle des deux faisceaux croisés. On peut ainsi piéger les atomes à trois dimensions autour du point de croisement des deux faisceaux.

### Ordres de grandeur

Pour le  $^{87}\text{Rb}$ , les données concernant la raie  $D_2$  sont données dans le tableau 2.1 [Steck, 2008], ainsi que les caractéristiques de notre piège dipolaire. On obtient ainsi une profondeur  $U_0/k_B$  de l'ordre de  $400\,\mu\text{K}$ . Pour un angle entre les deux faisceaux de  $70^\circ$ , on aura donc un piège de pulsations  $\omega_X \simeq 2\pi \times 530\,\text{Hz}$ ,  $\omega_Y \simeq$

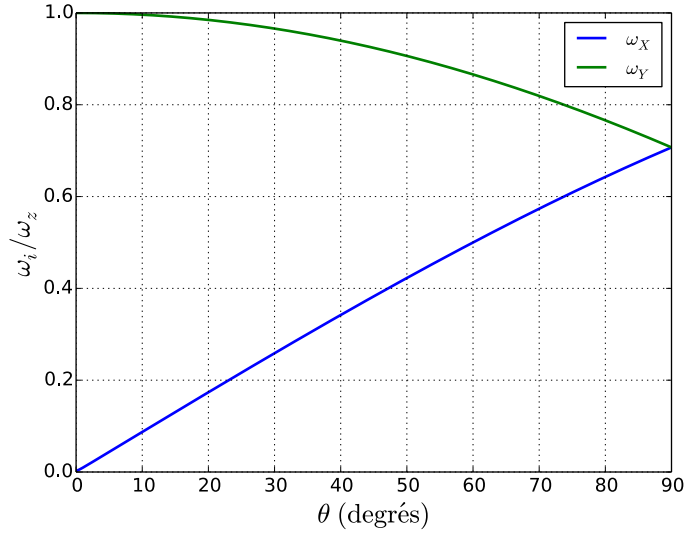


Fig. 2.5 Pulsations selon les axes propres du piège résultant du croisement de deux faisceaux en fonction de l'angle formé par ces derniers.

Table 2.1 Ordres de grandeur du piège pour le  $^{87}\text{Rb}$

|   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| Longueur d'onde du laser $\lambda_L$                                      | 1064 nm                             |
| Longueur d'onde de la raie D <sub>2</sub> du $^{87}\text{Rb}$ $\lambda_0$ | 780,24 nm                           |
| Largeur naturelle $\Gamma$  | $38,117 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ |
| Puissance   | 20 W                                |
| Waist des faisceaux $w_0$   | 96 $\mu\text{m}$                    |
| Profondeur du piège $U_0/k_B$   | 410 $\mu\text{K}$                   |
| Pulsation transverse du piège créée par un faisceau $\omega_{\perp}$      | $2\pi \times 650 \text{ Hz}$        |
| Pulsation dans la direction d'un faisceau $\omega_{\parallel}$            | $2\pi \times 1,6 \text{ Hz}$        |

$2\pi \times 760$  Hz et  $\omega_z \simeq 2\pi \times 930$  Hz.

### Évaporation dans un piège optique

L'évaporation au sein d'un piège optique s'effectue en diminuant progressivement l'intensité lumineuse des faisceaux pièges. Ainsi, la forme du potentiel de piégeage change au cours du temps. Le taux de collisions élastiques, qui dépend de la fréquence de piégeage va donc diminuer au cours du temps. Le modèle simple utilisé précédemment ne permet donc pas de décrire un refroidissement par évaporation au sein d'un piège optique. Par contre, si ce changement est effectué adiabatiquement, la variation d'énergie totale du système qui était donnée par (2.2.2) comportera maintenant un terme supplémentaire correspondant à la variation d'énergie due à la variation de  $U$  [O'Hara et al., 2001] :

$$dE = (\eta + \kappa) dN k_B T + \frac{3N k_B T}{2} \frac{dU}{U}. \quad (2.2.16)$$

Ceci permet d'obtenir les lois d'échelle suivantes :

$$\frac{N_f}{N_i} = \left( \frac{U_f}{U_i} \right)^{1/2\alpha}, \quad \frac{D_f}{D_i} = \left( \frac{U_i}{U_f} \right)^{\frac{3\alpha-1}{2\alpha}} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma_f}{\gamma_i} = \left( \frac{U_f}{U_i} \right)^{\frac{\eta+\kappa}{2(\eta+\kappa-3)}}, \quad (2.2.17)$$

qui nous permettent d'estimer l'évolution du nombre d'atomes, de la densité dans l'espace des phases ainsi que du taux de collisions. Dans ces expressions, on a gardé la même définition pour  $\alpha$  que précédemment. Il est à noter que contrairement au modèle d'évaporation de la section précédente, le taux de collisions n'augmente pas au cours du temps, sauf si  $\eta + \kappa < 3$ . Il ne peut donc pas y avoir d'emballlement de l'évaporation. Cependant le taux de collisions initial dans un piège optique est beaucoup plus grand que pour un piège magnétique, permettant d'aboutir à des temps d'évaporation beaucoup plus courts (de l'ordre de la seconde alors que les temps d'évaporation dans des pièges magnétiques sont de l'ordre de la dizaine de secondes).

La dépendance temporelle de la profondeur du piège est, quant à elle, imposée par la condition d'évaporation à  $\eta$  constante. Celle-ci est donnée par :

$$\frac{U}{U_0} = \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right)^{-2 \frac{\eta+\kappa-3}{\eta+\kappa}}, \quad (2.2.18)$$

avec la constante de temps [Couvert, 2009] :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{3}(\eta + \kappa)(\eta - 4)e^{-\eta}\gamma_0. \quad (2.2.19)$$

**Conclusion** Nous avons présenté le phénomène de condensation de Bose-Einstein d'un gaz d'atomes. Dans un premier temps, nous avons donné la température critique d'un gaz parfait sans interactions dans un piège harmonique, température en-dessous de laquelle l'accumulation des atomes dans l'état fondamental du piège se produit. Nous avons donné les équations de Gross-Pitaevskii qui permettent de prendre en compte les interactions entre les atomes au sein du gaz. Dans un second temps, nous avons présenté la technique du refroidissement permettant d'atteindre des températures inférieures à la température critique et donc de réaliser expérimentalement la condensation de Bose-Einstein. Nous avons donné des lois d'échelle caractérisant cette technique, et plus particulièrement, nous avons donné les ordres de grandeur caractéristiques correspondant au piège dipolaire que nous avons réalisé pour notre expérience.

## Chapitre 3

# Interférométrie atomique en champ moyen

On présente dans ce chapitre un modèle théorique et une simulation numérique reposant sur la résolution des équations de Gross-Pitaevskii couplées pour estimer le déphasage induit par les interactions entre atomes à la sortie d'un interféromètre atomique, dans la limite du gaz dilué, dans l'objectif d'estimer l'effet de la présence d'interactions pour les mesures de précision. On commence tout d'abord par étudier l'effet du champ moyen en présence de couplage atome-lumière, puis lors d'une évolution libre des paquets d'onde atomiques. On applique ensuite notre modélisation à deux configurations : tout d'abord un interféromètre de Ramsey-Bordé, réalisé à l'aide d'une séquence d'impulsions Raman  $\{\pi/2 - \pi/2\} - \{\pi/2 - \pi/2\}$ , puis la configuration « gravimètre » formée par la séquence temporelle  $\pi/2 - \pi - \pi/2$ . On applique dans cette dernière configuration notre modèle pour calculer le déphasage dans l'expérience de Stanford de Mark Kasevich, qui vise à tester le principe d'équivalence en réalisant deux gravimètres simultanés avec deux espèces atomiques différentes, et dont l'objectif est d'obtenir une incertitude sur  $g$  de l'ordre de  $10^{-15}$ . Enfin, on discute de l'intérêt d'un interféromètre utilisant des séparatrices à double diffraction afin de s'affranchir de l'effet des interactions entre atomes.

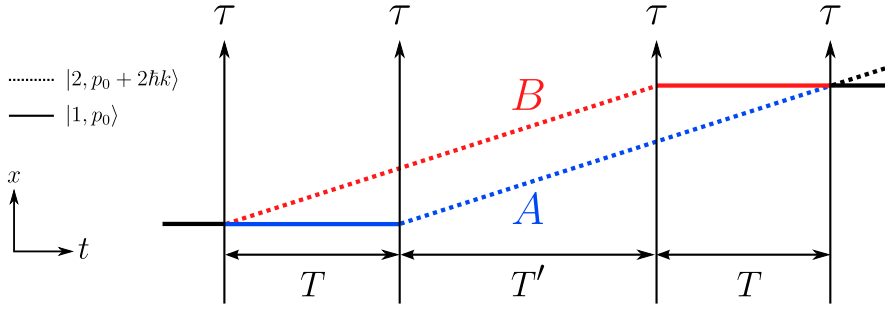


Fig. 3.1 *Interféromètre de Ramsey-Bordé. Le nuage d'atomes initial est séparé en deux par la première impulsion Raman afin de définir deux trajectoires A et B qui sont recombinées lors de la dernière impulsion Raman. Les trajectoires des paquets atomiques qui n'interfèrent pas lorsque l'on referme l'interféromètre n'ont pas été représentés.*

### 3.1 Effet du champ moyen d'interactions au cours de la séquence interférométrique

On souhaite modéliser un interféromètre de Ramsey-Bordé utilisant comme source atomique un condensat de Bose-Einstein. La séquence temporelle est constituée de deux paires d'impulsions Raman. Chaque impulsion lumineuse induit une transition Raman à deux photons entre les deux sous-niveaux hyperfins  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$ . Celles-ci sont réalisées grâce à deux faisceaux lasers contre-propageants de pulsations et vecteurs d'onde respectifs  $\omega_1, \omega_2$  et  $k_1, k_2$ . Cette transition s'accompagne d'un transfert d'impulsion entre la lumière et les atomes de  $2\hbar k$ , où  $k = k_1 \simeq k_2$ . Entre deux impulsions, les atomes évoluent librement. La séquence de l'interféromètre, ainsi que les trajectoires des atomes sont représentés dans la figure 3.1.

Les interactions au sein d'un condensat de Bose-Einstein peuvent être traitées dans l'approximation de « champ moyen », qui est valable dans la limite où le gaz est constitué d'un grand nombre d'atomes ( $N \gg 1$ ) et où la longueur de diffusion  $a$  peut être considérée petite devant la distance moyenne entre les atomes ( $n|a|^3 \ll 1$ , où  $n$  est la densité du gaz). L'évolution du condensat, dans cette limite, est décrite par l'équation de Gross-Pitaevskii. Celle-ci a la forme d'une équation de Schrödinger à laquelle s'ajoute un terme non-linéaire, correspondant aux interactions entre les atomes, et qui dépend de la densité du gaz. Cette description ne prend en compte que les interactions à deux corps. Si l'on

considère deux nuages d'atomes qui se recouvrent, chacun d'eux sera soumis à un terme correspondant aux interactions des atomes qui le constituent, que nous appellerons interactions propres, ainsi qu'à un second terme correspondant aux interactions qu'il subit de la part des atomes constituant l'autre nuage, que nous dénommerons interactions mutuelles.

On ne considèrera ici que la limite où le terme non-linéaire peut être considéré comme une perturbation à l'équation de Schrödinger et n'induit qu'un déphasage sur le paquet d'onde. Cette approximation est valable dans le cas où le champ moyen au centre du paquet est petit devant toutes les autres énergies caractéristiques du système. Par exemple, pour un paquet d'onde constitué de  $10^5$  atomes de rubidium et dont la taille typique est de l'ordre de  $60 \mu\text{m}$ , le champ moyen au centre de celui-ci est de l'ordre de  $350 \text{ mHz}$ . Cette valeur est bien plus petite que celle de l'énergie cinétique qui est de l'ordre de  $100 \text{ Hz}$  pour une température de  $10 \text{ nK}$ . Cependant, le déphasage induit par le champ moyen sur un interféromètre de type Ramsey-Bordé de temps caractéristiques  $T$  et  $T'$  de l'ordre de  $100 \text{ ms}$  est de l'ordre de quelques  $\text{mrad}$ . Par exemple pour une mesure de la gravité  $g$ , cela correspond à une incertitude relative de l'ordre de  $1,5 \times 10^{-9}$  pour ces valeurs de  $T$  et  $T'$ , ce qui est bien plus grand que la précision obtenue pour des mesures de haute précision.

On suppose que la distribution spatiale d'atomes possède une forme gaussienne. On suppose de plus que le mouvement dans les directions transverses ne sera pas altéré par la présence des interactions. On écrit ainsi la fonction d'onde à trois dimensions comme  $\Xi(\mathbf{r}, t) = \Theta(\mathbf{r}_\perp) \Psi(x, t)$ , où  $\mathbf{r}_\perp$  représente la position dans les directions transverses, de telle sorte que l'on intègre l'équation de Gross-Pitaevskii sur celles-ci. On aboutit ainsi à une équation de Gross-Pitaevskii à 1D, qui est donnée par :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2} + \sum_j N g_{ij} |\Psi_j|^2 \Psi_i, \quad (3.1.1)$$

avec  $N$  le nombre total d'atomes et les constantes d'interaction à 1D,  $g_{ij}$ , données par :

$$g_{ij} = \frac{2\hbar^2 a_{ij}}{m w_\perp^2}, \quad (3.1.2)$$

où  $a_{ij}$  est la longueur de diffusion de l'onde  $s$  entre les niveaux  $i$  et  $j$  et  $w_\perp$  représente l'étalement spatial transverse du nuage, défini par le profil transverse



du nuage, qui est donné par :

$$\Theta(\mathbf{r}_\perp) = \sqrt{\frac{2}{\pi w_\perp^2}} \exp\left(-\frac{r_\perp^2}{w_\perp^2}\right). \quad (3.1.3)$$

La fonction d'onde, solution de la situation sans interactions, du nuage dans l'état  $i$  est approximée par l'ansatz suivant :

$$\Phi_i(x, t) = c_i(t) \sqrt{\rho_i(x, t)}, \quad (3.1.4)$$

où les  $c_i(t)$  sont définis tels que  $\sum_j |c_j(t)|^2 = 1$  et où l'on introduit l'enveloppe gaussienne  $\rho_i(x, t)$  du paquet d'onde, qui est donnée par :

$$\rho_i(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2}} \exp\left(-\frac{2(x - x_i(t))^2}{w^2}\right), \quad (3.1.5)$$

avec  $w$  l'extension spatiale du nuage selon la direction  $x$ , et  $x_i(t)$  la position à l'instant  $t$  du nuage  $i$ . Cette enveloppe est de plus normalisée de telle sorte que l'on ait :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_i(x, t) dx = 1. \quad (3.1.6)$$

Dans le cadre de notre modèle, les interactions n'ont pour effet que d'ajouter une phase aux fonctions d'onde  $\Phi_i(x, t)$ . Les fonctions d'onde correspondant au cas avec interactions  $\Psi_i(x, t)$  seront donc données par :

$$\Psi_i(x, t) = e^{i\phi_i(t)} \Phi_i(x, t), \quad (3.1.7)$$

où  $\phi_i(t)$  est la phase induite par le champ moyen au temps  $t$  sur le paquet  $i$ , que l'on cherche à déterminer.

Afin de pouvoir juger de la validité de notre modèle analytique, une simulation numérique permettant de résoudre les équations de Gross-Pitaevskii couplées a été développée. On trouvera le détail de la procédure de résolution numérique dans l'annexe A. Afin de comparer les phases acquises par les différents nuages au cours de la séquence interférométrique, on commence par simuler la situation sans interactions, on a ainsi accès aux fonctions d'onde non perturbées  $\Phi_i(x, t)$ . On réalise ensuite la même simulation numérique en « allumant » les interactions propres ou mutuelles, nous donnant les fonctions d'onde  $\Psi_i(x, t)$  perturbées par

les interactions. Ainsi en projetant celles-ci sur leurs homologues non perturbées, on a accès à la phase induite par les interactions sur les nuages atomiques :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_i^*(x,t) \Psi_i(x,t) dx = e^{i\phi_i(t)}. \quad (3.1.8)$$

### 3.1.1 Phases acquises lors d'une impulsion Raman

Au cours des impulsions Raman, les deux sous-niveaux hyperfins  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$  sont couplés par une transition Raman induite par deux lasers contre-propageants. On peut considérer le système comme un système à deux niveaux effectifs, de pulsation de Rabi effective  $\Omega$ . Le désaccord  $\delta$  à la transition permet de compenser l'effet Doppler dû au transfert d'impulsion entre la lumière et les atomes, qui est de  $\pm 2\hbar k$ .

#### Solutions du système sans interactions

L'Hamiltonien de ce système s'écrit :

$$H_0 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \Omega/2 \\ \Omega/2 & \delta \end{pmatrix} = \frac{\hbar\delta}{2} I + \frac{\hbar\Omega}{2} \sigma_x - \frac{\hbar\delta}{2} \sigma_z, \quad (3.1.9)$$

où  $I$  est la matrice identité et  $\sigma_x$  et  $\sigma_z$  sont les matrices de Pauli. Celui-ci rend compte du phénomène d'oscillations de Rabi. En effet, la population d'atomes dans chacun des niveaux va varier dans le temps sous l'action du couplage  $\Omega$ . En utilisant la formule

$$e^{ia(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})} = \cos(a)I + i \sin(a)(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}), \quad (3.1.10)$$

où  $\hat{n}$  est un vecteur normé et  $\vec{\sigma}$  le vecteur de Pauli, l'opérateur d'évolution du système peut s'écrire sous la forme :

$$U_0(t) = e^{-iH_0t/\hbar} = e^{-i\delta t/2} \left[ \cos(\Omega_{\text{eff}}t/2)I + i \sin(\Omega_{\text{eff}}t/2) \left( -\frac{\Omega}{\Omega_{\text{eff}}} \sigma_x + \frac{\delta}{\Omega_{\text{eff}}} \sigma_z \right) \right], \quad (3.1.11)$$

avec la pulsation effective  $\Omega_{\text{eff}} = \sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$ . A résonance, c'est-à-dire pour un désaccord  $\delta$  nul, celui-ci est donné par :

$$U_0(t) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t/2) & -i \sin(\Omega t/2) \\ -i \sin(\Omega t/2) & \cos(\Omega t/2) \end{pmatrix}. \quad (3.1.12)$$

Le système est initialement dans l'état donné par :

$$|\Phi_0\rangle = a_1|1\rangle + ia_2e^{i\varphi}|2\rangle, \quad (3.1.13)$$

avec  $a_1^2 + a_2^2 = 1$ . L'état du système au temps  $t$  sera donné par :

$$|\Phi(t)\rangle = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle, \quad (3.1.14)$$

avec les expressions de  $c_1(t)$  et  $c_2(t)$  suivantes :

$$c_1(t) = a_1 \cos(\Omega t/2) + a_2 e^{i\varphi} \sin(\Omega t/2), \quad (3.1.15)$$

$$c_2(t) = -i(a_1 \sin(\Omega t/2) - a_2 e^{i\varphi} \cos(\Omega t/2)). \quad (3.1.16)$$

On retrouve la formule des oscillations de Rabi pour les fractions d'atomes dans chacun des niveaux, qui sont données par :

$$|c_1(t)|^2 = a_1^2 \cos^2(\Omega t/2) + a_2^2 \sin^2(\Omega t/2) + 2a_1a_2 \cos \varphi \cos(\Omega t/2) \sin(\Omega t/2), \quad (3.1.17)$$

$$|c_2(t)|^2 = a_1^2 \sin^2(\Omega t/2) + a_2^2 \cos^2(\Omega t/2) - 2a_1a_2 \cos \varphi \cos(\Omega t/2) \sin(\Omega t/2). \quad (3.1.18)$$

### Calcul perturbatif de l'effet des interactions

Si l'on considère les interactions entre les atomes, le terme non-linéaire de l'équation de Gross-Pitaevskii a pour effet de déplacer les niveaux de chacun des deux états  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$ . En effet, les interactions dues à un nuage d'atomes ont pour effet de créer un potentiel effectif, dépendant du nombre d'atomes du paquet ainsi que de sa densité, qui agira sur ce nuage lui-même et sur tous les paquets d'onde atomiques avec qui il interagit sur son parcours. Dans notre modèle, le déplacement induit par le paquet  $j$  sur le paquet  $i$  est pris comme la valeur moyenne du champ moyen d'interactions s'appliquant sur  $i$  pondérée par  $j$ . Il est

défini par l'expression suivante :

$$V_{j \rightarrow i}(t) = |c_j(t)|^2 N g_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_i(x, t) \rho_j(x, t) dx. \quad (3.1.19)$$

On peut définir la pulsation moyenne d'interactions,  $\omega_{ij}$ , telle que :

$$\omega_{ij} = \frac{N g_{ij}}{\hbar \sqrt{\pi} w}, \quad (3.1.20)$$

ainsi que la fonction de recouvrement  $D_{ij}(t)$  des deux nuages  $i$  et  $j$ , définie telle que :

$$D_{ij}(t) = \sqrt{\pi} w \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_i(x, t) \rho_j(x, t) dx, \quad (3.1.21)$$

de telle sorte que l'expression (3.1.19) peut s'écrire comme :

$$V_{j \rightarrow i}(t) = |c_j(t)|^2 \hbar \omega_{ij} D_{ij}(t). \quad (3.1.22)$$

La fonction de recouvrement dépend uniquement de la distance relative  $\Delta x(t) = x_j(t) - x_i(t)$  séparant les deux paquets d'onde, et s'écrit :

$$D_{ij}(t) = \exp \left( -\frac{(x_j(t) - x_i(t))^2}{w^2} \right). \quad (3.1.23)$$

Si l'on considère le recouvrement d'un paquet  $i$  avec lui-même, on a en toute logique  $D_{ii}(t) = 1$  à tout instant  $t$ . De même, dans le cas où deux paquets dans des états internes différents se recouvrent intégralement, la fonction de recouvrement sera égale à 1.

Le potentiel  $V(t)$  créé par le champ moyen sur chacun des états possède deux contributions : la première correspondant aux interactions propres des atomes dans un état sur eux-mêmes, et la seconde aux interactions mutuelles d'un état sur l'autre. L'expression du potentiel effectif  $V(t)$  est donnée par :

$$V(t) = \begin{pmatrix} V_{1 \rightarrow 1}(t) + V_{2 \rightarrow 1}(t) & 0 \\ 0 & V_{1 \rightarrow 2}(t) + V_{2 \rightarrow 2}(t) \end{pmatrix}. \quad (3.1.24)$$

Chacun des termes  $V_{j \rightarrow i}(t)$  dépend de la proportion d'atomes dans l'état  $j$ . Comme on l'a vu, l'effet du couplage lumière-atomes est d'induire des inversions périodiques de population entre les deux niveaux au cours du temps, selon

la formule des oscillations de Rabi. De plus, nous nous plaçons dans la limite où les interactions sont suffisamment faibles pour que l'on puisse considérer qu'elles n'ajoutent qu'une phase aux fonctions d'onde du système. Ceci n'est vrai que dans la mesure où le condensat est suffisamment dilué pour que la valeur moyenne de l'énergie d'interaction reste faible devant les autres énergies caractéristiques du système. La proportion d'atomes dans chacun des états n'est donc pas altérée. Nous pouvons donc introduire les fractions d'atomes solutions de l'évolution du système sans interactions. Enfin, si l'on prend une pulsation de Rabi suffisamment grande, on pourra considérer les deux paquets complètement recouverts durant la durée de l'impulsion. L'expression (3.1.24) donne dans ces conditions :

$$V(t) = \begin{pmatrix} |c_1(t)|^2 \hbar \omega_{11} + |c_2(t)|^2 \hbar \omega_{12} & 0 \\ 0 & |c_1(t)|^2 \hbar \omega_{12} + |c_2(t)|^2 \hbar \omega_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.1.25)$$

où l'on peut remplacer  $|c_1(t)|^2$  et  $|c_2(t)|^2$  par les expressions données par (3.1.17) et (3.1.18).

L'Hamiltonien total du système avec interactions est donné par :

$$H(t) = H_0 + V(t). \quad (3.1.26)$$

On peut ainsi voir les interactions entre atomes comme un potentiel effectif perturbant le système, d'Hamiltonien  $H_0$  et dont nous avons obtenu les solutions. Le potentiel créé dépend de plus des solutions du système sans interactions, qui évoluent dans le temps. L'évolution du système avec interactions peut alors être obtenue en traitant le problème dans le cadre de la théorie des perturbations dépendant du temps. L'opérateur d'évolution s'écrit au premier ordre en perturbation :

$$U(t) = U_0(t) + \delta U(t), \quad (3.1.27)$$

avec comme on l'a vu précédemment  $U_0(t)$ , donné par (3.1.11), et solution de l'équation :

$$i\hbar \frac{dU_0}{dt} = H_0 U_0(t). \quad (3.1.28)$$

L'expression générale du développement en perturbations au premier ordre de l'opérateur d'évolution est donc donnée par l'expression suivante [Cohen-Tannoudji

et al., 2001] :

$$\delta U(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t U_0(t-\tau) V(\tau) U_0(\tau) d\tau. \quad (3.1.29)$$

On peut remplacer dans l'expression (3.1.29)  $U_0(t)$  et  $V(t)$  par leurs expressions respectives (3.1.11) et (3.1.24). Après intégration, on trouve des expressions pour les éléments de matrice  $\delta U_{ij}(t)$  que l'on peut écrire sous la forme :

$$\delta U_{ij}(t) = -i^{\delta_{ij}} \sum_{k,l} \frac{\omega_{kl}}{4\Omega} \left( a_1^2 F_{ijkl}(t) + a_2^2 G_{ijkl}(t) + 2a_1 a_2 \cos \varphi H_{ijkl}(t) \right). \quad (3.1.30)$$

Le détail du calcul ainsi que les expressions des fonctions  $F_{ijkl}(t)$ ,  $G_{ijkl}(t)$  et  $H_{ijkl}(t)$  sont donnés dans l'annexe B.

On cherche maintenant à déterminer la phase induite par le potentiel effectif créé par les interactions sur chacun des niveaux internes des atomes. La solution du système avec interactions s'écrit :

$$|\Psi(t)\rangle = U(t)|\Phi_0\rangle = (c_1(t) + \delta c_1(t))|1\rangle + (c_2(t) + \delta c_2(t))|2\rangle \quad (3.1.31)$$

$$= c_1(t)(1 + \delta c_1(t)/c_1(t))|1\rangle + c_2(t)(1 + \delta c_2(t)/c_2(t))|2\rangle. \quad (3.1.32)$$

Ainsi, on aura pour chacun des états  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$  :

$$|\Phi_i(t)\rangle = c_i(t)(1 + \epsilon_i(t))e^{i\phi_i(t)}|i\rangle, \quad (3.1.33)$$

où la phase induite par le champ moyen est donnée par  $\phi_i(t) = \text{Im}\{\delta c_i(t)/c_i(t)\}$  et la perturbation sur le nombre d'atomes est  $\epsilon_i(t) = \text{Re}\{\delta c_i(t)/c_i(t)\}$ . On a de plus :

$$\frac{\delta c_i(t)}{c_i(t)} = \frac{\sum_j \delta U_{ij}(t) c_j(0)}{\sum_j U_{0ij}(t) c_j(0)}, \quad (3.1.34)$$

ce qui nous permet d'obtenir des expressions en fonction de  $a_1$ ,  $a_2$  et  $\varphi$  :

$$\frac{\delta c_1(t)}{c_1(t)} = \frac{\delta U_{11}(t) a_1 + i \delta U_{12}(t) a_2 e^{i\varphi}}{a_1 \cos(\Omega t/2) + a_2 e^{i\varphi} \sin(\Omega t/2)}, \quad (3.1.35)$$

$$\frac{\delta c_2(t)}{c_2(t)} = \frac{i \delta U_{21}(t) a_1 - \delta U_{22}(t) a_2 e^{i\varphi}}{a_1 \sin(\Omega t/2) - a_2 e^{i\varphi} \cos(\Omega t/2)}. \quad (3.1.36)$$

On peut tout de suite remarquer, d'après la forme des expressions ci-dessus et de (3.1.30), que lorsque  $a_1$  ou  $a_2$  sont nuls, correspondant au cas où tous les atomes

sont initialement dans le même état, les expressions précédentes sont imaginaires pures, et l'on n'obtient ainsi qu'un terme de phase.

Pour des impulsions de durée  $\tau = \pi/(2\Omega)$ , et pour  $a_2 = 0$  (les coefficients correspondant à la situation inverse  $a_1 = 0$  pouvant être déterminés par permutations circulaires, comme indiqué dans l'annexe B), on détermine les valeurs des coefficients des éléments de matrice de  $\delta U(\tau)$  qui interviennent dans le calcul des phases. On obtient :

$$\delta U_{11}(\tau) = -\frac{i}{16\sqrt{2}\Omega} [(3\pi + 14)\omega_{11} + (3\pi - 10)\omega_{22} + 2(\pi - 2)\omega_{12}], \quad (3.1.37)$$

$$\delta U_{21}(\tau) = -\frac{1}{16\sqrt{2}\Omega} [(3\pi + 2)\omega_{11} + (3\pi - 6)\omega_{22} + 2(\pi + 2)\omega_{12}]. \quad (3.1.38)$$

Ceci nous permet d'en déduire l'expression numérique des phases acquises par  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$  après une impulsion Raman  $\pi/2$ , qui sont données par :

$$\phi_1(\tau) = -\frac{1}{16\Omega} [(3\pi + 14)\omega_{11} + (3\pi - 10)\omega_{22} + 2(\pi - 2)\omega_{12}], \quad (3.1.39)$$

$$\phi_2(\tau) = -\frac{1}{16\Omega} [(3\pi + 2)\omega_{11} + (3\pi - 6)\omega_{22} + 2(\pi + 2)\omega_{12}]. \quad (3.1.40)$$

### Comparaison avec les résultats numériques

On compare les expressions que l'on a obtenues précédemment avec ce que l'on trouve en résolvant numériquement les équations couplées de Gross-Pitaevskii. Pour ce faire, on simule une première fois l'évolution du système sans interactions. Puis, on effectue la même résolution numérique en « allumant » successivement chacune des constantes d'interaction  $g_{ij}$ . Les fonctions d'onde avec interactions sont ensuite projetées sur leurs homologues sans interactions, nous donnant accès à la phase induite sur chacun des états par les interactions, comme décrit par l'expression (3.1.8).

La figure 3.2 présente les phases acquises par les états  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$  au cours du temps pendant une impulsion Raman, de pulsation de Rabi  $\Omega = 2\pi \times 500$  Hz. Les atomes sont initialement tous dans l'état  $|1\rangle$  et forment un nuage caractérisé par une enveloppe gaussienne de taille  $w = 30 \mu\text{m}$ . La pulsation moyenne des interactions appliquée est de l'ordre de  $\omega = 2\pi \times 3$  Hz. Les contributions de chacun des termes  $\omega_{ij}$  sont présentées. Comme on peut le constater, on obtient un accord quasiment parfait entre les résultats de la simulation numérique et les phases

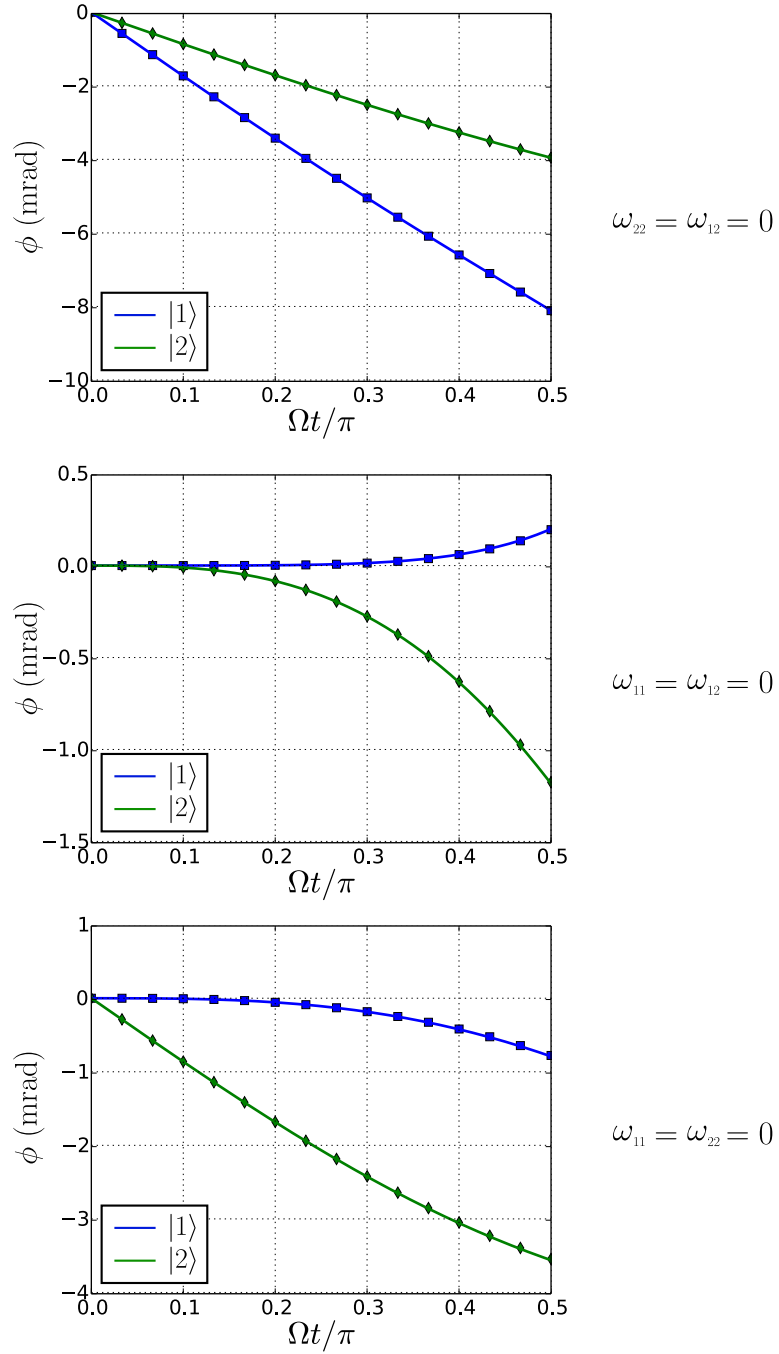


Fig. 3.2 Phases obtenues en partant de la situation où tous les atomes se trouvent dans l'état  $|1\rangle$ , au cours d'une impulsion Raman. En bleu (respectivement vert), est représentée la phase acquise par l'état  $|1\rangle$  (resp.  $|2\rangle$ ). Les résultats obtenus grâce à notre modèle analytique figurent en traits pleins, tandis que les résultats de la simulation numérique sont représentés par des points. Les différentes contributions des  $\omega_{ij}$  sont obtenues en ne laissant non nulle que la longueur de diffusion  $a_{ij}$  correspondante.



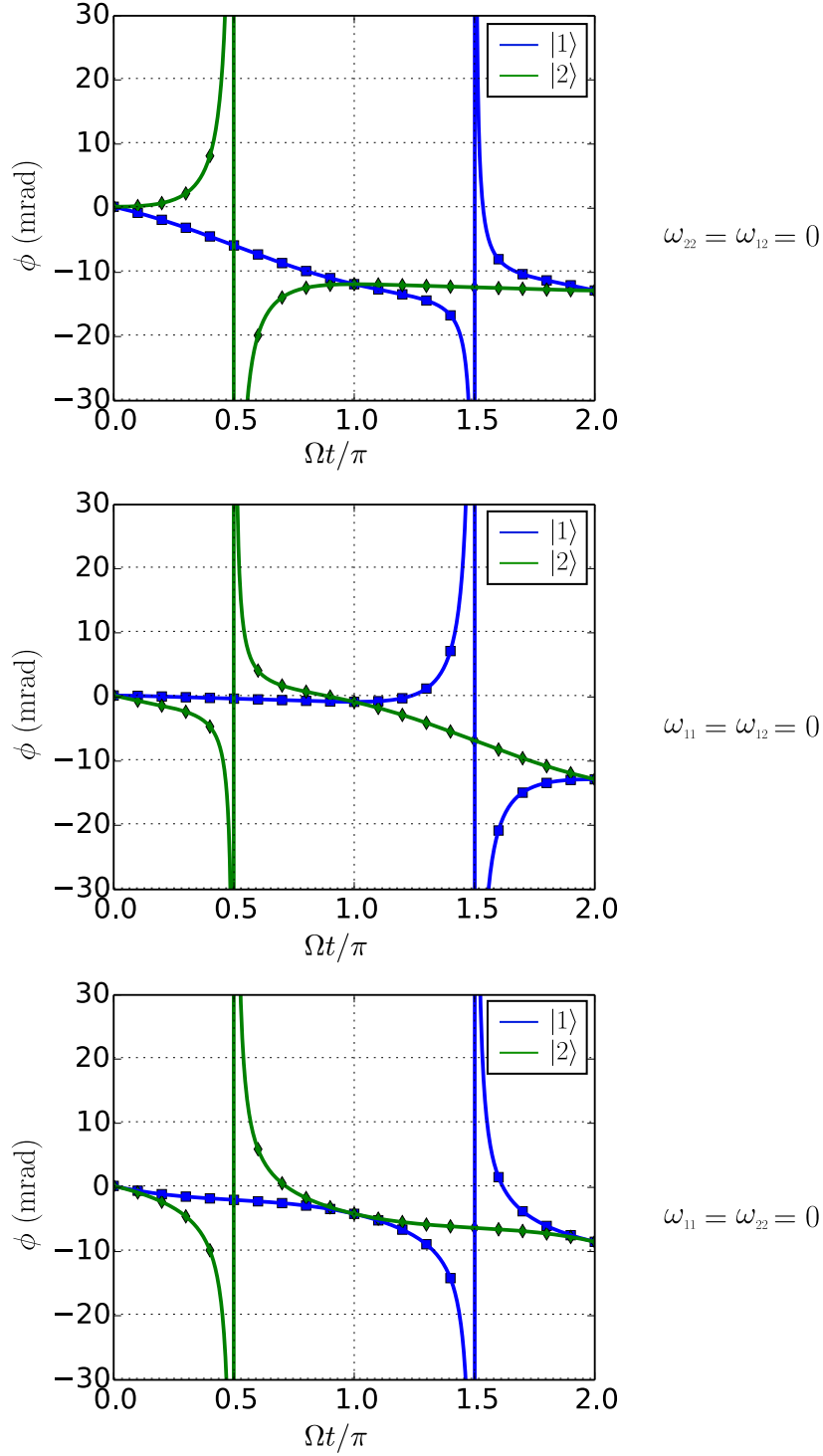


Fig. 3.3 Phases obtenues en partant de la situation où tous les atomes se trouvent dans l'état  $(|1\rangle + i|2\rangle)/\sqrt{2}$ , au cours d'une impulsion Raman. Les mêmes légendes que dans la figure 3.2 sont reprises.

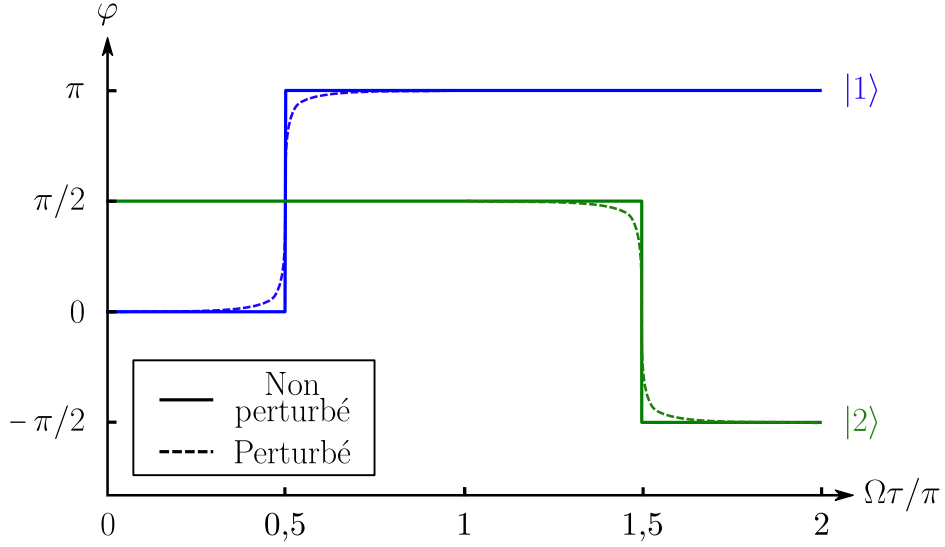


Fig. 3.4 *Sauts de phase en partant d'un état  $(|1\rangle + i|2\rangle)/\sqrt{2}$ .*

calculées grâce à notre modèle. On remarquera de plus qu'interchanger l'état de départ des atomes résulte en une permutation circulaire des contributions. La figure 3.3 présente les phases dues au champ moyen de chacun des niveaux pour un état initial  $(|1\rangle + i|2\rangle)/\sqrt{2}$ , où les paquets atomiques initiaux sont là encore tous les deux gaussiens avec  $w = 30 \mu\text{m}$ . Ici encore, on constate qu'on obtient un très bon accord entre les résultats numériques et ceux issus de notre modèle.

Les divergences qui apparaissent dans la figure 3.3 peuvent être expliquées en considérant le phénomène des oscillations de Rabi sans interactions. Lorsque la population d'un des deux états devient nulle, un saut de phase de  $\pi$  s'imprime sur la fonction d'onde de cet état, comme le montre la figure 3.4. En présence d'interactions entre atomes, le système est perturbé par un potentiel dépendant du nombre d'atomes dans chacun des états. Or, leur population varie continûment sous l'effet de l'interaction avec le champ Raman. Les phases des paquets vont donc elles aussi varier de façon continue sous l'effet des interactions, et non plus de manière discontinue comme c'est le cas pour le cas non perturbé (figure 3.4).

Enfin, on a depuis le début supposé que le nombre d'atomes transférés par une impulsion n'était pas altéré par la présence des interactions. Il est possible de vérifier ceci en traçant l'amplitude relative de la perturbation sur le nombre d'atome  $\delta N_i/N$ , ce qui est représenté en figure 3.5. Comme nous pouvons le constater, cette perturbation est extrêmement faible, de l'ordre de  $10^{-5}$ , nous pouvons donc la négliger.

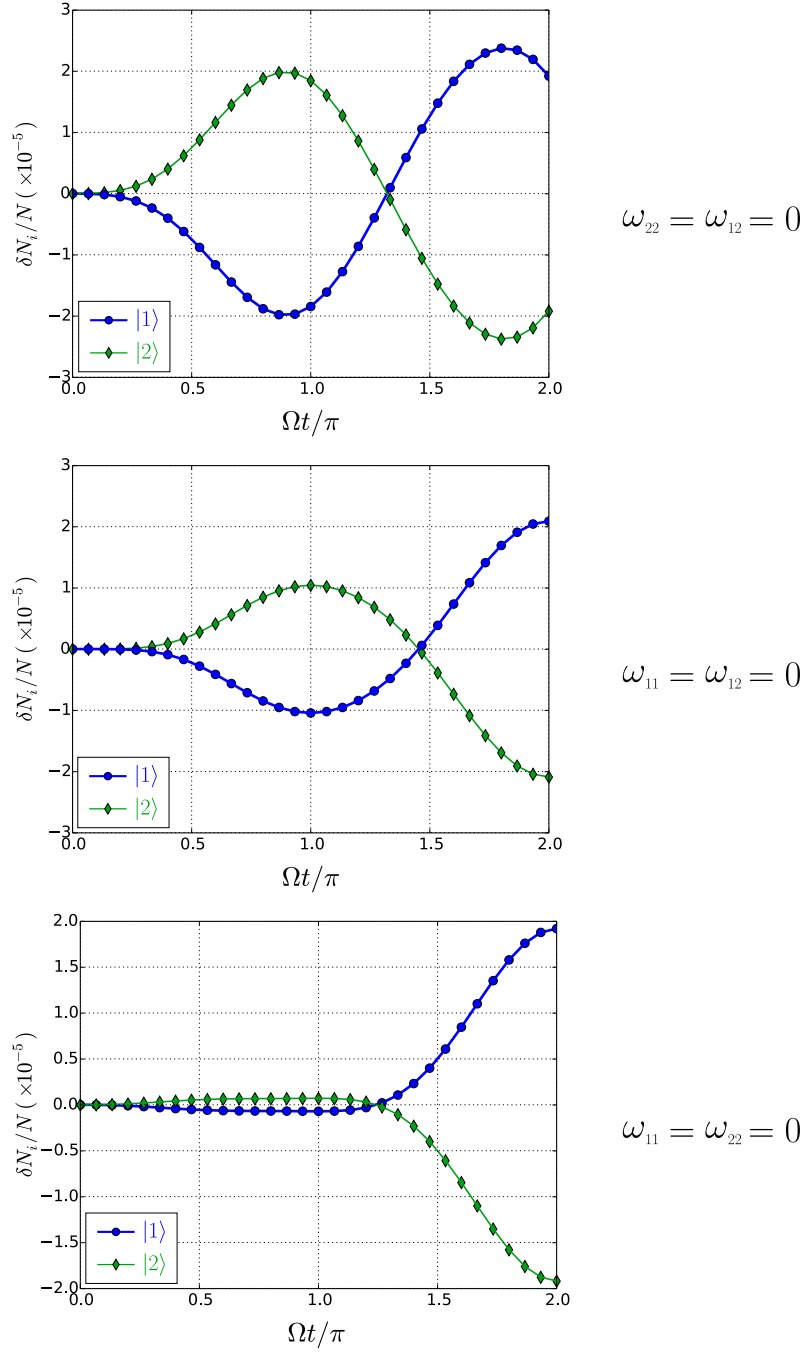


Fig. 3.5 Contributions des  $\omega_{ij}$  sur la perturbation sur les nombres relatifs d'atomes dans chacun des états, au cours d'une impulsion Raman, en partant d'un état  $(|1\rangle + i|2\rangle)/\sqrt{2}$ .

### 3.1.2 Phases acquises par libre propagation

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux effets des interactions en l'absence de tout potentiel extérieur, c'est-à-dire pendant les évolutions libres. Les atomes ne subissent donc plus que le potentiel effectif créé par leurs interactions. Les fonctions d'onde du système sans interactions sont données par  $\Phi_i(x,t)$  tandis que celles du système avec interactions sont données par  $\Psi_i(x,t)$ . Etant donné que les interactions sont faibles, elles n'auront ainsi pour effet, comme on l'a supposé précédemment, que de déplacer les deux états. Elles n'ajouteront ainsi qu'un terme de phase par rapport aux fonctions d'onde sans interactions, si bien que l'on aura  $\Psi_i(x,t) = e^{i\phi_i(t)}\Phi_i(x,t)$ . Les fonctions d'onde  $\Phi_i(x,t)$  satisfont l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2}. \quad (3.1.41)$$

Les fonctions d'onde  $\Psi_i(x,t)$  satisfont, quant à elles, l'équation de Gross-Pitaevskii :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2} + N \sum_j g_{ij} |\Psi_j|^2 \Psi_i. \quad (3.1.42)$$

En remplaçant  $\Psi_i$  par son expression dans l'équation (3.1.42), on obtient :

$$i\hbar \left( -i\dot{\phi}_i \Phi_i + \dot{\Phi}_i \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + N \sum_j g_{ij} |\Phi_j|^2 \Phi_i. \quad (3.1.43)$$

Et donc :

$$\dot{\phi}_i = \sum_j \frac{N g_{ij}}{\hbar} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_i|^2 |\Phi_j|^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_i|^2 dx}. \quad (3.1.44)$$

En remplaçant les fonctions d'onde  $\Phi_i$  par l'ansatz donné par l'expression (3.1.4), on trouve l'expression suivante :

$$\dot{\phi}_i = \sum_j |c_j(t)|^2 \frac{N g_{ij}}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_i(x,t) \rho_j(x,t) dx. \quad (3.1.45)$$

On obtient finalement la phase induite par les interactions sur le niveau  $|i\rangle$  en

intégrant l'expression précédente, ce qui donne :

$$\phi_i(t) = \sum_j \omega_{ij} \int_0^t |c_j(t')|^2 D_{ij}(t') dt', \quad (3.1.46)$$

en reprenant les définitions de la section précédente. Il n'y a ici pas de couplage entre les deux niveaux internes, le nombre d'atomes dans chacun d'eux restera donc fixe au cours du temps. La phase acquise par le nuage  $i$  est donc donnée par l'expression :

$$\phi_i(t) = \sum_j \omega_{ij} |c_j(0)|^2 \int_0^t D_{ij}(t') dt'. \quad (3.1.47)$$

La fonction de recouvrement  $D_{ij}(t)$  est donnée par l'expression (3.1.23). Le recouvrement d'un paquet  $i$  par lui-même est, comme on l'a vu, donné en tout temps  $t$  par  $D_{ii}(t) = 1$ . On peut en déduire directement la contribution des interactions propres à la phase. Celle-ci est linéaire en temps et est donnée par :

$$\phi_i^{\text{prop}}(t) = |c_i(0)|^2 \omega_{ii} t. \quad (3.1.48)$$

Pour obtenir la contribution des interactions mutuelles, on doit exprimer la distance relative  $\Delta x(t)$  séparant les deux nuages que l'on considère. D'après l'expression (3.1.23), l'intégrale de la fonction de recouvrement peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\int_0^t D_{ij}(t') dt' = \int_{\Delta x(0)}^{\Delta x(t)} \frac{1}{\partial \Delta x / \partial t} \exp\left(-\frac{\Delta x^2}{w^2}\right) d\Delta x. \quad (3.1.49)$$

Etant donné que l'on ne considère que les états internes  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$ , et que ceux-ci sont séparés en vitesse de  $2v_r$ , les atomes ne sont pas accélérés au cours de leurs phases de propagation libre. En effet, étant donné que l'on se place dans le régime des interactions faibles, l'accélération des nuages due à ces dernières est complètement négligeable. Dans le cas où l'on considère que les atomes sont soumis à la gravité, en se plaçant dans le référentiel en chute libre avec les atomes, les deux paquets possèdent là aussi une différence de vitesse de  $2v_r$ . On a donc une distance relative qui augmente ou diminue linéairement avec le temps. On

peut donc réécrire l'expression précédente comme :

$$\int_0^t D_{ij}(t') dt' = \pm \frac{1}{|\Delta v|} \int_{\Delta x(0)}^{\Delta x(t)} \exp\left(-\frac{\Delta x^2}{w^2}\right) d\Delta x, \quad (3.1.50)$$

où  $\Delta v = v_j - v_i$ . Le signe de l'expression dépend du signe de la vitesse du nuage  $j$  dans le référentiel de  $i$ . On peut finalement réécrire l'expression de la manière suivante :

$$\int_0^t D_{ij}(t') dt' = \pm \frac{\sqrt{\pi}w}{2|\Delta v|} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{\Delta x(t)}{w}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\Delta x(0)}{w}\right) \right], \quad (3.1.51)$$

où la fonction d'erreur est définie telle que :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (3.1.52)$$

Considérons le cas où l'on a l'état initial  $(|1\rangle + i|2\rangle)/\sqrt{2}$ , et où les deux nuages d'atomes sont initialement à la même position. Les atomes dans l'état  $|2\rangle$  possèdent une différence de vitesse de  $2v_r$  par rapport à ceux dans l'état  $|1\rangle$ . On laisse ces deux paquets se propager librement, si bien que les deux paquets vont se séparer l'un de l'autre au fur et à mesure. D'après l'expression (3.1.51), l'intégrale de recouvrement vue par  $|1\rangle$  de  $|2\rangle$ , au temps  $t$ , sera donnée par :

$$\int_0^t D_{12}(t') dt' = \frac{\sqrt{\pi}w}{4v_r} \operatorname{erf}\left(\frac{2v_r t}{w}\right), \quad (3.1.53)$$

et l'intégrale de recouvrement vue par  $|2\rangle$  de  $|1\rangle$  :

$$\int_0^t D_{21}(t') dt' = \int_0^t D_{12}(t') dt'. \quad (3.1.54)$$

On peut donc écrire la phase induite sur le paquet  $i$  par les interactions mutuelles, qui est donnée par :

$$\phi_i^{\text{mut}}(t) = |c_j|^2 \omega_{ij} \frac{\sqrt{\pi}w}{4v_r} \operatorname{erf}\left(\frac{2v_r t}{w}\right). \quad (3.1.55)$$

La figure 3.6 présente les résultats de notre simulation numérique pour la propagation libre de deux paquets d'extension spatiale  $w = 30 \mu\text{m}$ , de mêmes

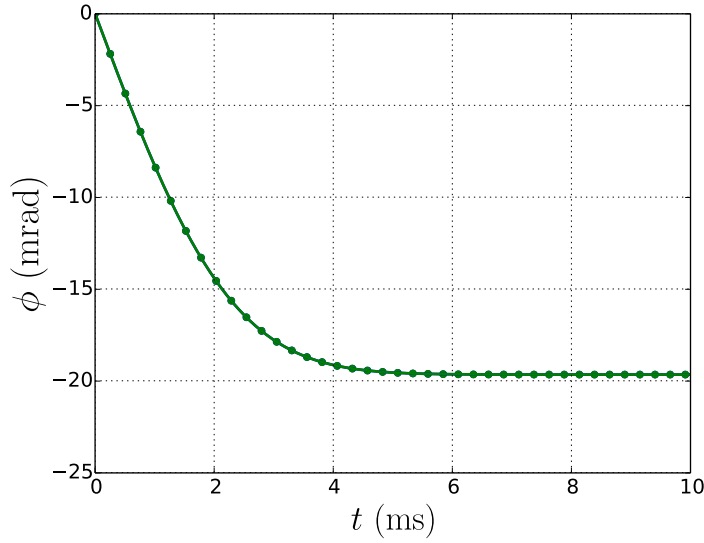


Fig. 3.6 *Evolution des phases induites par les interactions mutuelles sur deux nuages dans les états  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$ , possédant une différence de vitesse de  $2v_r$ , pendant une durée d'évolution libre de 10 ms.*

nombres d'atomes. Ces deux paquets possèdent une différence de vitesse de  $2v_r$ . On n'a représenté que les phases induites sur les deux paquets par les interactions mutuelles (avec  $\omega_{12} \simeq 2\pi \times 3$  Hz). Celles-ci sont comparées avec les expressions (3.1.55). On constate ici aussi un excellent accord entre notre modèle et le résultat de la résolution numérique des équations de Gross-Pitaevskii.

### 3.1.3 Effet combiné : étude d'une interrogation de Ramsey

On cherche maintenant à déterminer la phase acquise par chacun des nuages au cours d'une interrogation Ramsey, constituée d'une paire d'impulsions Raman de durée  $\tau$  séparées par une phase de propagation libre de durée  $T$ . Les phases accumulées lors de la première impulsion peuvent être calculées en utilisant les expressions (3.1.35) et (3.1.36), avec comme condition initiale  $|\Phi_0\rangle = |1\rangle$ . Les phases induites par les interactions propres au cours de l'évolution libre seront, elles, données par (3.1.48), en prenant  $t_0 = \tau$ , et avec les fractions d'atomes :

$$|c_1(\tau)|^2 = 1 - \alpha \text{ et } |c_2(\tau)|^2 = \alpha, \quad (3.1.56)$$

où l'on définit l'efficacité de l'impulsion Raman telle que  $\alpha \equiv \sin^2(\Omega\tau/2)$ .

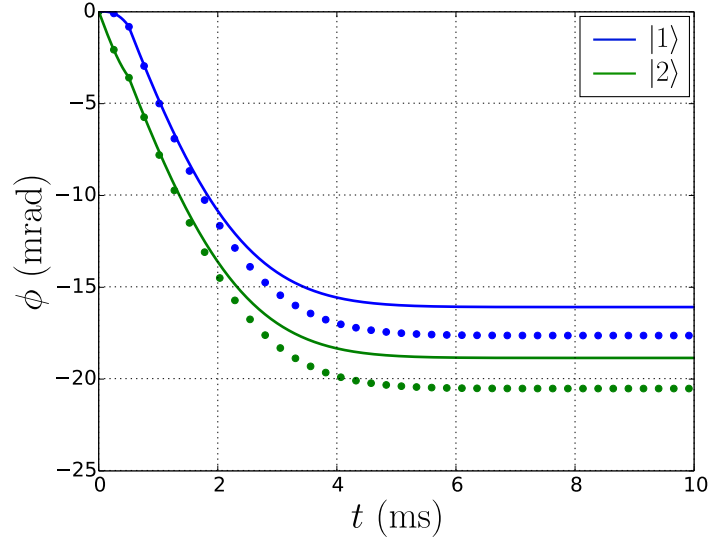


Fig. 3.7 Phases induites par les interactions mutuelles sur les deux nuages. Tous les atomes sont initialement dans l'état  $|1\rangle$ , une impulsion Raman, de durée  $500 \mu\text{s}$ , sépare le nuage en deux. Les paquets peuvent alors évoluer librement pendant  $9,5 \text{ ms}$ . Les traits pleins correspondent aux résultats du modèle tandis que les points représentent les résultats numériques.

Afin de déterminer les phases mutuelles acquises par les deux paquets au cours de la propagation libre, on considère tout d'abord par une approche simple que lors de la première impulsion Raman, les deux paquets possèdent une différence de vitesse de  $2v_r$ . On pourra donc calculer les phases mutuelles en prenant  $t_0 = \tau$ . Lorsque l'on compare ce modèle naïf aux résultats de la simulation numérique (figure 3.7), on s'aperçoit que l'on n'obtient pas un bon accord.

On s'intéresse alors à la distance relative des deux nuages après l'impulsion Raman. En effet, comme le montre la figure 3.8, on constate que le nuage dans l'état  $|1\rangle$  recule par rapport à la position du paquet initial. Celui dans l'état  $|2\rangle$ , par contre, évolue à la vitesse  $v_r$  contrairement à ce que l'on aurait pu penser. On doit ainsi estimer la distance séparant les deux paquets afin d'obtenir un bon accord avec notre modèle.

Pour ce faire, considérons que tous les atomes sont initialement dans l'état  $|1\rangle$ . On considère le système sans interactions. Au cours de la première impulsion Raman, les deux niveaux sont couplés avec une pulsation de Rabi  $\Omega$ , et un désaccord à résonance  $\delta$ . Celui-ci correspond au déplacement Doppler par rapport



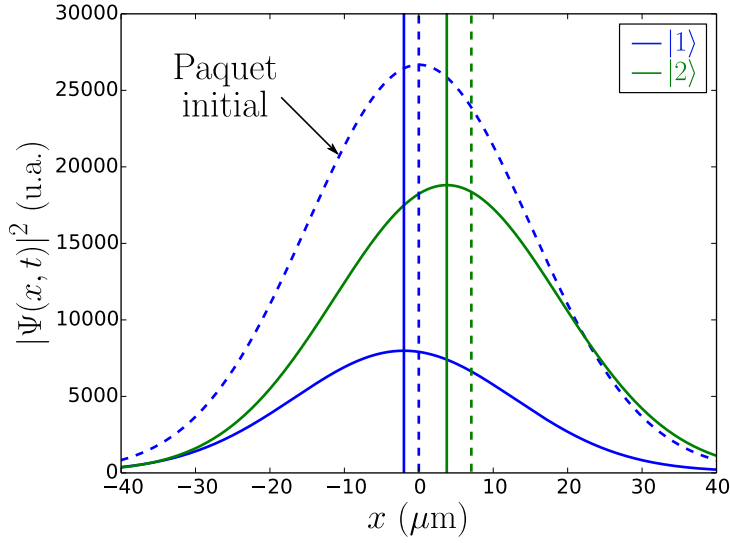


Fig. 3.8 Fonctions d'onde des états  $|1\rangle$  (bleu) et  $|2\rangle$  (vert), après  $600 \mu s$  de couplage Raman. Les positions moyennes des paquets ont été représentées par les traits pleins verticaux. La fonction d'onde initiale est représentée en pointillés bleus, ainsi que sa position moyenne. La ligne verticale verte en pointillés indique la position correspondant à  $2v_r t$ .

à la transition, et est donné par :

$$\delta(p) = \frac{2k}{m}p = \frac{2v_r}{\hbar}p, \quad (3.1.57)$$

avec  $k = k_1 \simeq k_2$ , où  $k_1$  et  $k_2$  sont les vecteurs d'onde des deux faisceaux Raman contre-propageants, et  $p$  correspond à l'impulsion des atomes. Les fonctions d'onde dans l'espace des impulsions des deux états sont données, d'après l'expression (3.1.11), par :

$$\tilde{\Phi}_1(p, t) = \left( \cos(\Omega_{\text{eff}} t/2) + i \frac{\delta}{\Omega_{\text{eff}}} \sin(\Omega_{\text{eff}} t/2) \right) e^{-i\delta t/2} \tilde{\Phi}_1(p, 0), \quad (3.1.58)$$

$$\tilde{\Phi}_2(p + 2\hbar k, t) = -i \frac{\Omega}{\Omega_{\text{eff}}} \sin(\Omega_{\text{eff}} t/2) e^{-i\delta t/2} \tilde{\Phi}_1(p, 0), \quad (3.1.59)$$

où la pulsation effective est donnée par  $\Omega_{\text{eff}} = \sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$ . A partir de ces expressions, on peut déterminer les phases  $\varphi_1(t)$  et  $\varphi_2(t)$  des deux nuages, qui sont

données par :

$$\varphi_1(t) = -\frac{\delta t}{2} + \arctan \left( \frac{\delta}{\Omega_{\text{eff}}} \tan (\Omega_{\text{eff}} t / 2) \right), \quad (3.1.60)$$

$$\varphi_2(t) = -\frac{\delta t}{2}. \quad (3.1.61)$$

Les fonctions d'onde dans l'espace des positions s'écrivent donc de la façon suivante :

$$\Phi_i(x, t) = \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx/\hbar} e^{i\varphi_i(p, t)} \tilde{\Phi}_1(p, 0) dp \quad (3.1.62)$$

$$= \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\varphi_i(p, t) + px/\hbar)} \tilde{\Phi}_1(p, 0) dp. \quad (3.1.63)$$

D'après la méthode de la phase stationnaire, la principale contribution à cette intégrale correspondra au régime pour lequel le terme de phase varie lentement, soit lorsque l'on aura :

$$\hbar \frac{\partial}{\partial p} \left[ \varphi_i(p, t) + \frac{px}{\hbar} \right]_{p=0} = 0. \quad (3.1.64)$$

Par analogie avec la vitesse de groupe, on définit ainsi la « position de groupe » du paquet, qui sera donnée par :

$$X_i(t) = -\hbar \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial p} \right|_{p=0}. \quad (3.1.65)$$

Le calcul de cette position pour le paquet dans l'état  $|2\rangle$  est immédiat et donne :

$$X_2(t) = v_r t. \quad (3.1.66)$$

La phase  $\varphi_1(t)$  évaluée dans la limite  $p \rightarrow 0$ , soit quand  $\delta \rightarrow 0$ , est donnée par :

$$\varphi_1(t) \simeq -\delta \left[ \frac{t}{2} - \frac{1}{\Omega} \tan (\Omega t / 2) \right], \quad (3.1.67)$$

d'où l'on peut déduire la position du paquet atomique dans l'état  $|1\rangle$ . On trouve :

$$X_1(t) = v_r \left[ t - \frac{2}{\Omega} \tan (\Omega t / 2) \right]. \quad (3.1.68)$$

La figure 3.9 permet de comparer les expressions (3.1.68) et (3.1.66) avec les résultats de la simulation numérique. On a tracé les positions moyennes des deux paquets au cours du temps pendant une impulsion Raman, en partant de l'état initial  $|1\rangle$ . Comme attendu, le nuage dans l'état  $|2\rangle$  se déplace bien à la vitesse  $v_r$ . Le paquet dans  $|1\rangle$ , quant à lui, recule continuellement. Il disparaît en arrière de l'autre nuage et réapparaît en avance de celui-ci, lui permettant de le rejoindre lorsque la condition  $t = 2\pi/\Omega$  est remplie. Comme on peut le constater, notre modèle permet de rendre compte de l'évolution des positions moyennes au cours du temps, mais ne permet pas de calculer  $\langle X \rangle_1$  avec précision lorsque le nombre d'atomes dans le nuage dans  $|1\rangle$  devient faible, c'est-à-dire lorsque  $t \rightarrow \pi/\Omega$ . Par contre, tant que l'on reste proche de la condition  $\pi/2$ , on obtient une bonne estimation de la séparation des deux nuages.

Il est maintenant possible de déterminer la distance relative de séparation des deux paquets à la fin de l'impulsion Raman. Celle-ci est donnée par :

$$\Delta x(\tau) = X_2(\tau) - X_1(\tau) = 2v_r \frac{\tan(\Omega\tau/2)}{\Omega}. \quad (3.1.69)$$

Pour une impulsion Raman  $\pi/2$ , on obtient ainsi une séparation spatiale entre les paquets de  $\Delta x(\tau = \pi/(2\Omega)) = 2v_r/\Omega$ .

Lorsque l'impulsion Raman est terminée, les deux paquets retrouvent la différence de vitesse à laquelle on s'attend, on a  $\Delta v = 2v_r$ . Afin de pouvoir reprendre l'expression (3.1.51) de l'intégrale de recouvrement des deux paquets, on définit tout d'abord le temps effectif qu'aurait duré l'impulsion Raman si la différence de vitesse entre les deux nuages avait été de  $2v_r$ . Celui-ci est donné par  $t_{\text{eff}} = \Delta x(\tau)/(2v_r) = \tan(\Omega\tau/2)/\Omega$ . Ainsi, les phases induites sur les deux nuages par les interactions mutuelles seront données par :

$$\phi_i^{\text{mut}}(t) = |c_j|^2 \omega_{ij} \frac{\sqrt{\pi}w}{4v_r} \left[ \text{erf} \left( \frac{2v_r(t + t_{\text{eff}} - \tau)}{w} \right) - \text{erf} \left( \frac{\Delta x(\tau)}{w} \right) \right]. \quad (3.1.70)$$

Enfin, après la phase d'évolution libre des nuages, de durée  $T$ , une deuxième impulsion Raman est effectuée. Si la distance  $2v_r T$  parcourue par le nuage dans l'état  $|2\rangle$  est suffisamment grande devant l'étendue spatiale  $w$  des paquets atomiques, on peut considérer que les deux paquets, chacun dans un état interne différent, ne se recouvrent plus à  $T$ , ils peuvent donc être traités indépendamment. Cette deuxième impulsion Raman aura ainsi pour effet de séparer à nouveau

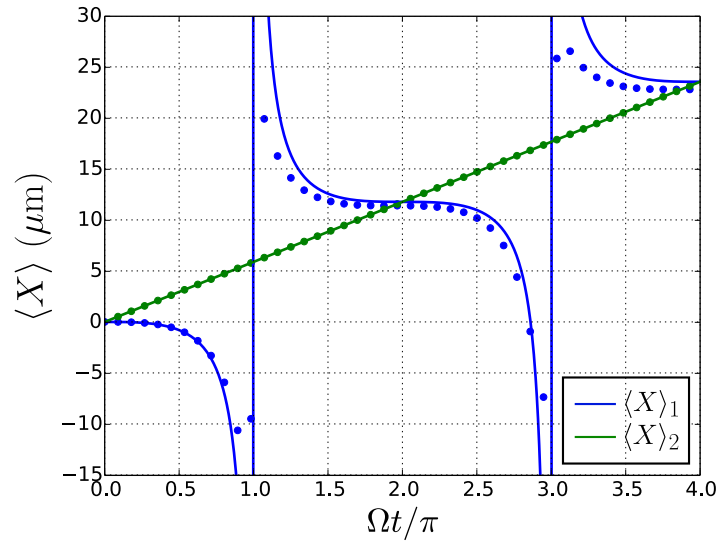


Fig. 3.9 Positions moyennes des paquets d'onde atomiques (Bleu :  $|1\rangle$  et Vert :  $|2\rangle$ ) au cours d'une impulsion Raman, sans interactions. Tous les atomes sont initialement dans l'état  $|1\rangle$  et sont soumis au couplage ( $\Omega = 2\pi \times 500$  Hz) créé par les faisceaux contre-propageant. Les résultats numériques sont représentés par des points, tandis que les expressions (3.1.68) et (3.1.66) sont tracées en courbes pleines.

chacun de ces nuages en deux, avec la même efficacité  $\alpha$  que la première. Pour déterminer l'effet du champ moyen sur les différents nuages résultant de cette dernière impulsion, on doit considérer la situation initiale où  $(1 - \alpha)N$  atomes sont dans l'état  $|1\rangle$ , puis en déduire les phases induites par les interactions au cours du couplage Raman. On devra, pour le deuxième paquet, considérer  $\alpha N$  atomes initialement dans l'état  $|2\rangle$ . Ces phases peuvent être calculées en utilisant les expressions (3.1.35) et (3.1.36), en utilisant les bonnes conditions initiales.

La figure 3.10 présente les phases induites par le terme d'interactions mutuelles des deux chemins  $A$  et  $B$  de l'interféromètre au cours de la séquence de Ramsey. Celle-ci laisse apparaître un bon accord entre notre modèle analytique et les résultats numériques.

## 3.2 Effet systématique lié à la présence d'interactions

On a jusqu'à présent déterminé les expressions générales des phases induites par les interactions entre atomes sur les nuages, dans le cas d'une part où les deux états internes sont couplés par le champ lumineux, et d'autre part lorsque les paquets atomiques évoluent librement. On a aussi déterminé l'effet du couplage atome-lumière sur la distance de séparation des nuages atomiques, permettant ainsi de calculer correctement leur recouvrement. On détermine maintenant la phase acquise par les atomes empruntant chaque bras de l'interféromètre, afin d'en déduire le déphasage obtenu à la fin de la séquence interférométrique, qui constitue un effet systématique pour toute mesure de  $h/m$  réalisée à l'aide d'un interféromètre atomique. On étudie ensuite l'influence de la durée des impulsions Raman ainsi que de l'extension spatiale des nuages, afin de mettre en évidence l'existence de différents régimes. Enfin, nous discutons de l'intérêt de l'utilisation de séparatrices atomiques à double diffraction afin de s'affranchir de l'effet des interactions.

### 3.2.1 Détermination de la différence de phase finale

La figure 3.11 présente les trajectoires des différents paquets atomiques qui interviennent au cours de la séquence de l'interféromètre. Comme on l'a fait

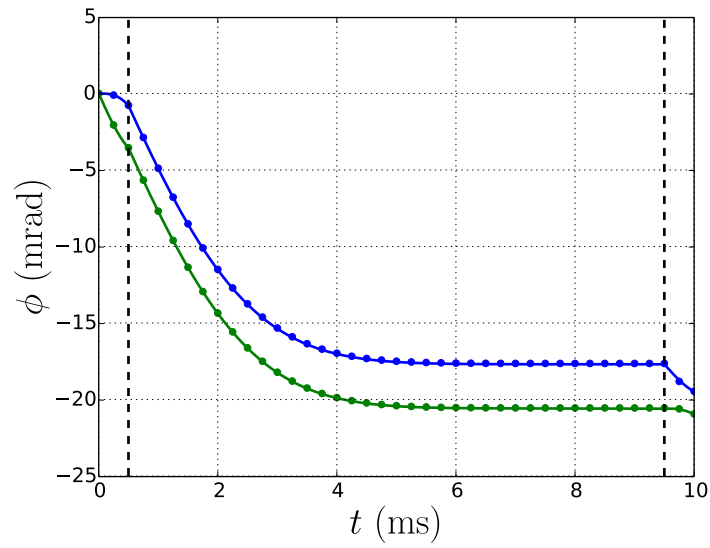


Fig. 3.10 Phases acquises, dues à l'effet des interactions mutuelles, par les nuages des chemins A (bleu) et B (vert) de l'interféromètre au cours d'une séquence constituée de deux impulsions  $\pi/2$  séparées d'une phase de propagation libre de 9 ms. Les résultats numériques (points) sont comparés avec ce que l'on calcule grâce au modèle (traits pleins). La fin (respectivement le début) de la première (resp. troisième) impulsion Raman correspond au trait pointillé vertical.

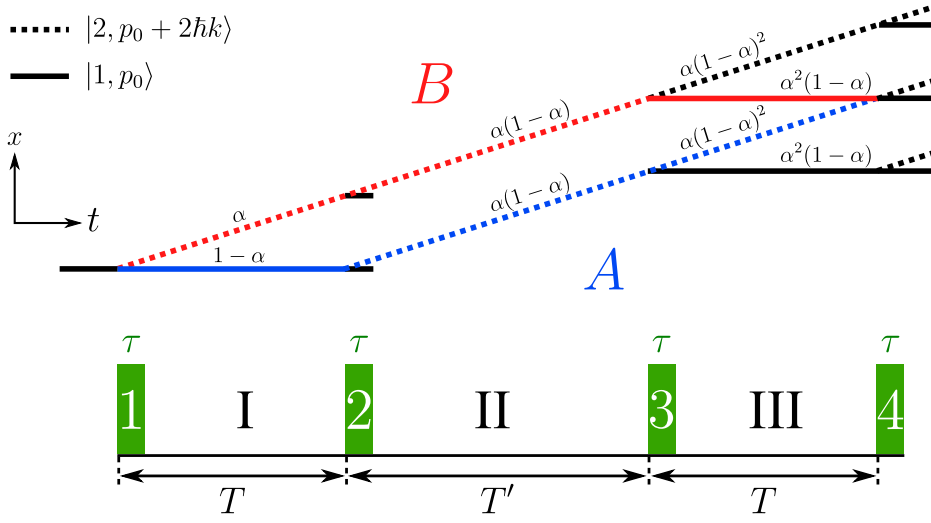


Fig. 3.11 Trajectoires des différents paquets atomiques lors de l'interféromètre de Ramsey-Bordé. Les deux bras de l'interféromètre sont représentés par les chemins A et B. On a indiqué la fraction d'atomes qui compose chaque nuage, en fonction de l'efficacité  $\alpha$  des impulsions Raman.

dans la section 3.1.3, on considère les temps de séparation  $T$  et  $T'$  des nuages suffisamment longs pour que l'on puisse considérer chaque paquet indépendant lors des impulsions Raman. La séquence temporelle est constituée de deux paires d'impulsions Raman séparées d'une durée  $T$  pendant laquelle les paquets se propagent librement (séquence de Ramsey). Ces deux interrogations de Ramsey sont elles-mêmes séparées d'une phase de propagation libre de durée  $T'$ . Un désaccord  $\delta_{\text{sel}}$  est appliqué à la première paire d'impulsions, tandis qu'un désaccord  $\delta_{\text{mes}}$  est appliqué à la deuxième paire. En balayant le désaccord  $\delta = \delta_{\text{sel}} - \delta_{\text{mes}}$ , on observe des franges d'interférence. Si l'on considère que le seul potentiel s'appliquant sur les atomes est celui induit par le champ moyen, la position de la frange centrale correspondra alors à la condition  $\delta = \Delta\phi/T$ , avec  $\Delta\phi = \phi_B - \phi_A$  la différence de phase entre les deux bras de l'interféromètre.

Pour déterminer la phase accumulée sur chacun des bras, on doit suivre chaque chemin jusqu'à la dernière impulsion Raman qui referme l'interféromètre. Pour ce faire, on définit quelques notations utiles qui vont nous permettre de décrire simplement le chemin emprunté par les atomes de chacun des bras. On définit tout d'abord  $\phi_{i \rightarrow j}^{(m)}$  comme la phase acquise par le nuage dans l'état  $|j\rangle$ , résultant de l'action de la  $m$ -ième séparatrice Raman sur un paquet dans l'état  $|i\rangle$ . On définit de même  $\phi_{i,P}^{(M)}$ , qui représente la phase accumulée par un nuage

dans l'état  $|i\rangle$  du chemin  $P$  au cours de la  $M$ -ième phase d'évolution libre. Avec l'aide de ces notations, les phases accumulées par les bras  $A$  et  $B$  sont données par :

$$\phi_A = \phi_{1 \rightarrow 1}^{(1)} + \phi_{1,A}^{(I)} + \phi_{1 \rightarrow 2}^{(2)} + \phi_{2,A}^{(II)} + \phi_{2 \rightarrow 2}^{(3)} + \phi_{2,A}^{(III)}, \quad (3.2.1)$$

$$\phi_B = \phi_{1 \rightarrow 2}^{(1)} + \phi_{2,B}^{(I)} + \phi_{2 \rightarrow 2}^{(2)} + \phi_{2,B}^{(II)} + \phi_{2 \rightarrow 1}^{(3)} + \phi_{1,B}^{(III)}. \quad (3.2.2)$$

Dans les expressions (3.2.1) et (3.2.2), les termes  $\phi_{i \rightarrow j}^{(m)}$  correspondant aux impulsions Raman sont donnés par les expressions (3.1.35) ou (3.1.36), en prenant la fraction d'atomes du nuage correspondant. Celles-ci dépendent de la fraction d'atomes dans chacun des paquets à chaque étape de l'interféromètre. Les phases accumulées lors de la première séquence de Ramsey ont été calculées dans la section précédente.

A la fin de la deuxième impulsion Raman, tous les atomes dans l'état  $|1\rangle$  sont poussés, pour ne pas créer d'interféromètre parasite. Les termes correspondant aux phases de propagation libre sont, comme on l'a vu, eux-mêmes la somme d'un terme d'interactions propres et d'un autre rendant compte des interactions mutuelles. Etant donné qu'il n'y a plus que des atomes dans  $|2\rangle$  après la deuxième impulsion, les termes mutuels disparaissent. On a de plus le même nombre d'atomes dans les deux chemins à ce stade de l'interféromètre, et vu que l'on peut considérer les paquets indépendants, les phases  $\phi_{2,A}^{(II)}$  et  $\phi_{2,B}^{(II)}$  sont égales, elles ne joueront donc pas de rôle dans la différence de phase totale.

Comme on peut le constater sur la figure 3.11, lors de la troisième phase de propagation libre, le nuage de  $A$ , qui est dans  $|2\rangle$ , interagit avec deux nuages dans l'état  $|1\rangle$ . Au cours de sa propagation, il va s'éloigner du paquet duquel il s'est séparé lors de la troisième séparatrice. Son recouvrement va donc être maximal au début de la phase (III) et nul à la fin. Il va aussi voir le nuage  $B$  se rapprocher de lui, de sorte que leur recouvrement est nul au début de (III) et maximal à la fin. On peut appliquer un raisonnement similaire au nuage  $B$  qui voit deux paquets dans l'état  $|2\rangle$ . Considérons le cas du nuage  $A$ . D'après la formule (3.1.51), son intégrale de recouvrement avec le paquet dont il s'est séparé lors de la troisième impulsion Raman est donnée par :

$$\int_0^t D_{12}(t') dt' = \frac{\sqrt{\pi} w}{4v_r} \operatorname{erf} \left( \frac{2v_r t}{w} \right), \quad (3.2.3)$$



puisque les deux nuages se recouvrent initialement et se séparent au cours du temps. Les paquets  $A$  et  $B$  sont, quant à eux, initialement séparés de la distance  $\Delta x(t_0) = 2v_r T$ . Ils vont se rapprocher au cours du temps, si bien que  $\Delta x(t) = 2v_r(T - t)$ . On aura donc :

$$\int_0^t D_{12}(t') dt' = \frac{\sqrt{\pi}w}{4v_r} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{2v_r T}{w} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{2v_r(T - t)}{w} \right) \right]. \quad (3.2.4)$$

Les formules précédentes s'appliquent aussi au nuage  $B$ , de telle sorte que l'on obtient finalement les phases mutuelles de  $A$  et  $B$  pendant (III) :

$$\phi_{2,A}^{(\text{III}),\text{mut}}(t) = \alpha^2(1 - \alpha)\omega_{12} \frac{\sqrt{\pi}w}{4v_r} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{2v_r t}{w} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{2v_r T}{w} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{2v_r(T - t)}{w} \right) \right], \quad (3.2.5)$$

$$\phi_{1,B}^{(\text{III}),\text{mut}}(t) = \alpha(1 - \alpha)^2\omega_{12} \frac{\sqrt{\pi}w}{4v_r} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{2v_r t}{w} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{2v_r T}{w} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{2v_r(T - t)}{w} \right) \right]. \quad (3.2.6)$$

On doit aussi prendre en compte l'effet de la troisième impulsion Raman sur la distance de séparation des paquets afin de déterminer l'expression complète des phases. On remplacera donc les temps  $t$  par  $t + t_{\text{eff}} - \tau$  où le temps effectif  $t_{\text{eff}}$  est calculé de la même façon que dans la section 3.1.3.

La figure 3.12 présente la contribution de  $\omega_{12}$  aux phases  $\phi_A$  et  $\phi_B$  au cours de la seconde séquence de Ramsey. On observe là encore un bon accord entre le modèle et les simulations numériques. De même, les figures 3.13 présentent l'évolution des phases au cours de la séquence de l'interféromètre. La contribution de chaque  $\omega_{ij}$  a été isolée. A la vue de ces figures, il semble que notre modèle soit satisfaisant pour décrire l'effet des interactions sur les bras de l'interféromètre, dans la limite où le condensat est suffisamment dilué pour que les interactions n'agissent qu'en perturbant le système, et dans le cas où les paquets se séparent complètement.

Nous pouvons ainsi nous intéresser à l'influence des différents paramètres sur l'effet systématique engendré par la présence des interactions.

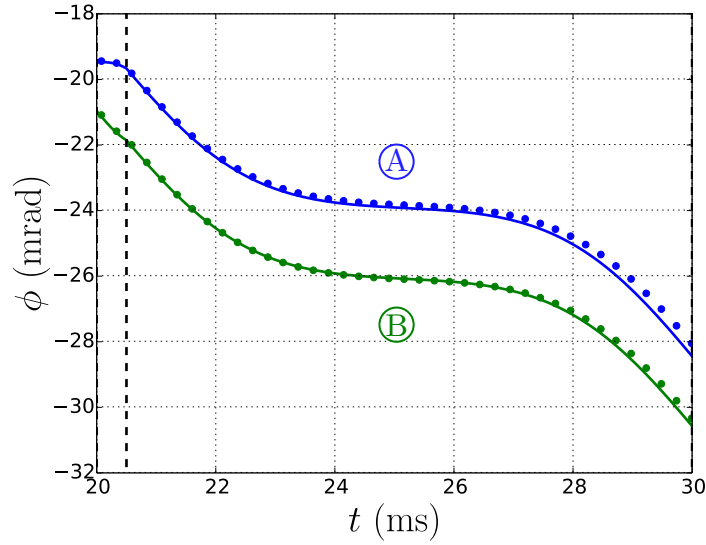


Fig. 3.12 Evolution des phases acquises sous l'effet des interactions mutuelles par les paquets des deux bras de l'interféromètre au cours de la deuxième séquence de Ramsey. Le chemin A est représenté en bleu, tandis que le chemin B figure en vert. Les courbes pleines représentent les résultats donnés par notre modèle et les points correspondent aux simulations numériques.

### 3.2.2 Influence de la durée des impulsions Raman

Le premier paramètre qui apparaît dans les expressions des phases dues au champ moyen est la fraction d'atomes dans chacun des nuages créés par les séparatrices Raman. On a défini l'efficacité  $\alpha$  comme la fraction d'atomes transférée par une impulsion. Celle-ci est donnée par  $\alpha(\tau) = \sin^2(\Omega\tau/2)$ , elle peut donc varier lorsque l'on change la durée  $\tau$  du couplage atome-champ.

D'après les expressions des déphasages que l'on a déterminées en (3.1.29), (3.1.48) et (3.1.70), la contribution à la phase totale d'une impulsion Raman est en  $\omega_{ij}\tau_{\pi/2}$ , tandis que celle d'une évolution libre est en  $\omega_{ii}T$  pour les interactions propres, et en  $\omega_{ij}w/v_r$  pour les interactions mutuelles. Etant donné que la durée d'une impulsion  $\pi/2$  est courte devant  $T$  ou  $T'$  et devant le temps caractéristique de recouvrement, qui est typiquement de l'ordre de la dizaine de millisecondes pour des nuages dont l'extension spatiale est de l'ordre de la centaine de microns, on peut en première approximation ne considérer que les phases acquises au cours de l'évolution libre. Ceci n'est évidemment valable que dans la limite où la proportion d'atomes  $\alpha$  transférée par les impulsions Raman n'est pas trop proche

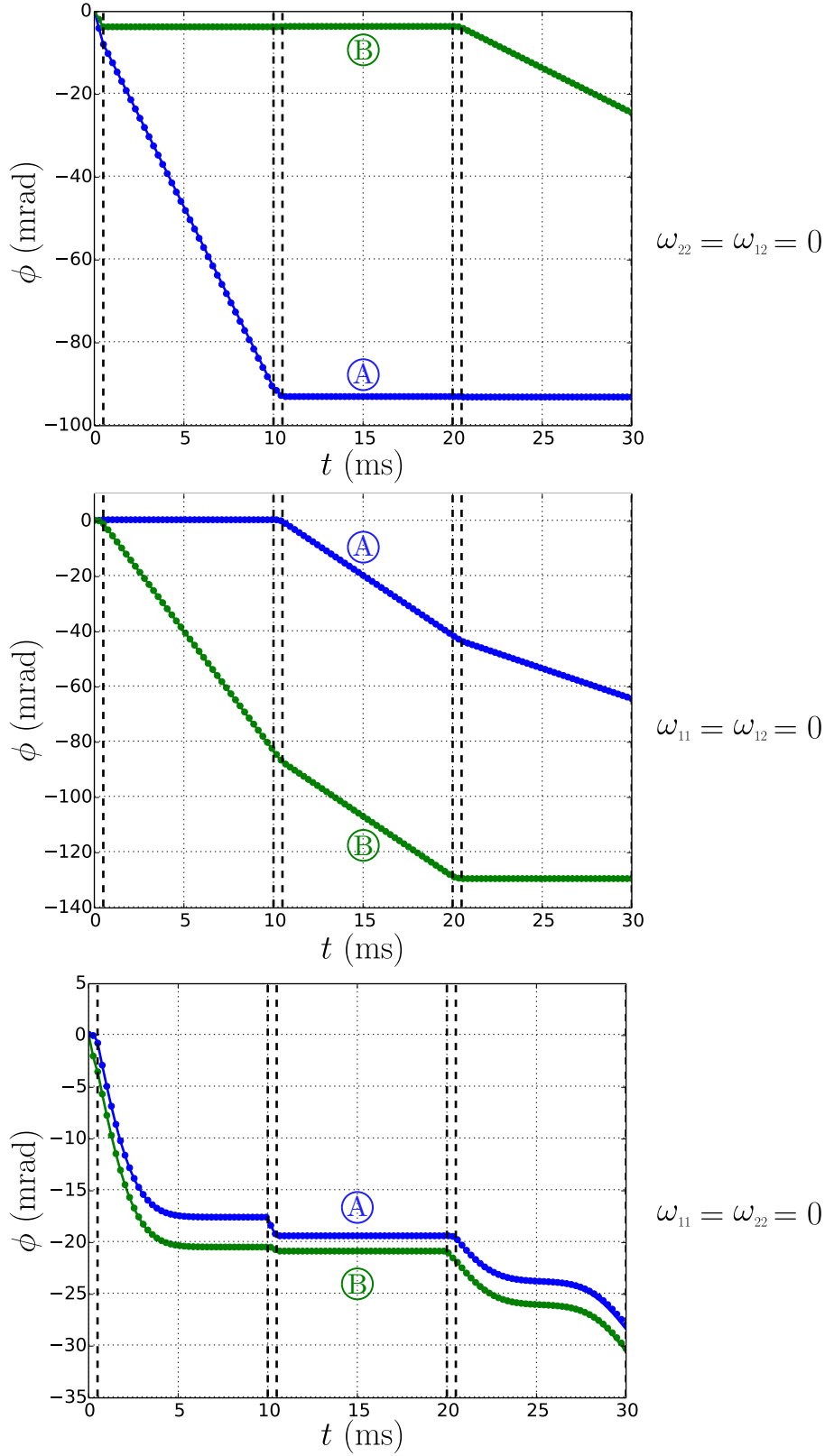


Fig. 3.13 Evolution des phases des chemins A (bleu) et B (vert) au cours de la séquence interférométrique. Les limites des impulsions Raman ont été représentées par les lignes pointillées verticales.

de 1, limite pour laquelle les contributions Raman divergent.

Si l'on néglige les termes  $\phi_{i \rightarrow j}^{(m)}$  dans les formules (3.2.1) et (3.2.2), on trouve la différence de phase  $\Delta\phi$  suivante :

$$\Delta\phi = \left[ \omega_{11}(\alpha + 1)(\alpha - 1)^2 - \omega_{22}(2 - \alpha)\alpha^2 + \omega_{12} \frac{\sqrt{\pi}w}{4v_r T} (1 - 2\alpha)(2\alpha^2 - 2\alpha - 1) \right] T, \quad (3.2.7)$$

qui laisse apparaître la symétrie entre les deux états internes. On peut aussi remarquer que l'expression de la différence de phase induite par les interactions ne dépend pas de la durée  $T'$  mais uniquement de la durée  $T$ . Ceci est dû au fait que le nombre d'atomes est le même dans les deux bras de l'interféromètre entre les deux séquences de Ramsey, quelle que soit la durée des impulsions Raman. On remarque de plus que lorsque l'on réalise des séparatrices atomiques 50/50, c'est-à-dire pour la condition  $\tau = \pi/(2\Omega)$ , la différence de phase n'est pas nulle mais donnée par :

$$\Delta\phi \left( \alpha = \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8} (\omega_{11} - \omega_{22}) T. \quad (3.2.8)$$

Cette expression ne dépend pas des interactions mutuelles. En effet, pour des impulsions Raman  $\pi/2$ , les fractions d'atomes sont égales dans les deux branches de l'interféromètre, à chaque étape. Ainsi la différence de phase entre les deux bras de l'interféromètre dépend de la différence entre les interactions propres moyennes de chacun des états internes du système. Celle-ci ne dépend que des différences entre les longueurs de diffusion dans l'onde  $s$  des différents états considérés. Pour un atome de  $^{87}\text{Rb}$ , les rapports  $a_{22}/a_{11}$  et  $a_{12}/a_{11}$  valent respectivement 95/100,4 et 97,66/100,4 [Anderson et al., 2009]. On aura donc une différence de phase  $\Delta\phi \simeq 0,02 \times \omega_{11}T$ , soit typiquement de quelques mrad pour des interactions moyennes de l'ordre du hertz et un temps d'interrogation de l'ordre de la dizaine de ms.

La figure 3.14 présente l'évolution de la position de la frange centrale avec la proportion d'atomes transférée  $\alpha$ , trouvée en simulant la séquence complète pour une pulsation de Rabi  $\Omega = 2\pi \times 500$  Hz, soit  $\tau_{\pi/2} = 0,5$  ms, des temps de libre propagation  $T = 9,5$  ms et  $T' = 11$  ms et des fréquences d'interactions de l'ordre de 3 Hz, correspondant à un nuage d'extension spatiale initiale  $w = 30$   $\mu\text{m}$ . Le calcul complet, tenant compte de la contribution des impulsions Raman, présente un bon accord avec les résultats numériques. On a de plus tracé l'expression (3.2.7). Celle-ci donne une bonne estimation de l'effet tant que l'on reste loin de

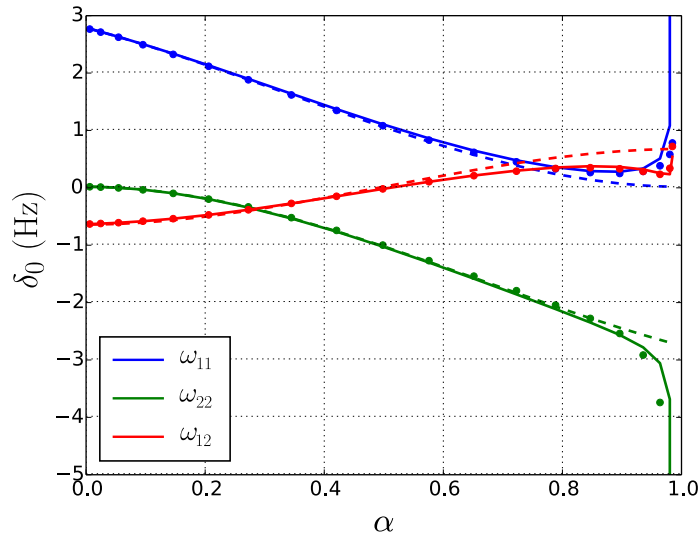


Fig. 3.14 Position de la frange centrale  $\delta_0$  de la figure d'interférence en fonction de l'efficacité des impulsions Raman. La contribution de chacune des pulsations d'interactions a été isolée et représentée par une couleur différente. Bleu :  $\omega_{11}$ , vert :  $\omega_{22}$  et rouge :  $\omega_{12}$ . Dans chaque cas, le résultat obtenu avec le modèle complet est représenté en trait plein, celui obtenu en simulant numériquement la séquence est représenté par des points. La formule (3.2.7) est, elle, tracée en pointillés.

la limite  $\alpha \rightarrow 1$ , comme on s'y attendait.

Il est expérimentalement difficile de contrôler très précisément la durée des impulsions Raman. Toute imprécision sur la durée de celles-ci entraînant une imprécision sur son efficacité  $\alpha$ , on peut développer l'expression (3.2.7) autour de  $\alpha = 1/2$ . Ceci nous permettra d'estimer l'effet systématique sur la position de la frange centrale, en estimant l'imprécision que l'on a sur la durée des séparatrices. On obtient l'expression :

$$\Delta\phi|_{\alpha \rightarrow 1/2} \simeq \frac{3}{8}(\omega_{11} - \omega_{22})T - \left[ \frac{5}{4}(\omega_{11} + \omega_{22}) + \frac{3}{4} \frac{\sqrt{\pi}w}{v_r T} \omega_{12} \right] T\delta\alpha. \quad (3.2.9)$$

Cette expression correspond à l'effet systématique induit par les interactions entre atomes sur un interféromètre atomique de Ramsey-Bordé, lié à  $\delta\alpha$ , l'imprécision sur la fraction d'atomes transférée par une impulsion Raman. Nous utiliserons dans la suite cette expression pour donner des ordres de grandeur de limite de sensibilité pour des mesures de grande précision.

### 3.2.3 Influence de l'extension spatiale du nuage

Le deuxième paramètre dont on peut étudier l'influence est la taille des nuages. En effet, on voit bien que selon ce que l'on a déterminé précédemment, le recouvrement spatial entre les nuages est à l'origine de la majeure partie de l'effet.

La fréquence moyenne d'interactions, telle qu'on l'a définie par l'expression (3.1.20), dépend de l'extension spatiale du nuage d'atomes. Si l'on veut faire varier la taille des paquets sans changer la valeur moyenne des interactions, on doit jouer sur le nombre d'atomes composant le condensat initial. En effet, augmenter ou diminuer la taille du nuage revient à diluer ou concentrer les interactions, on doit donc, pour conserver celles-ci constantes, augmenter ou diminuer  $N$ . Si l'on veut faire varier linéairement  $w$ , de telle sorte que  $w = \gamma w_0$ , avec  $\gamma$  un facteur numérique, on doit compenser en faisant varier le nombre d'atomes de la façon suivante  $N = \gamma^3 N_0$ .

La figure 3.15 présente la position  $\delta_0$  de la frange centrale de la figure d'interférences en fonction de l'extension spatiale  $w$  du nuage que l'on fait varier linéairement comme on l'a décrit précédemment, et en maintenant la valeur moyenne des interactions constante. Les résultats du calcul complet, ainsi que des simula-

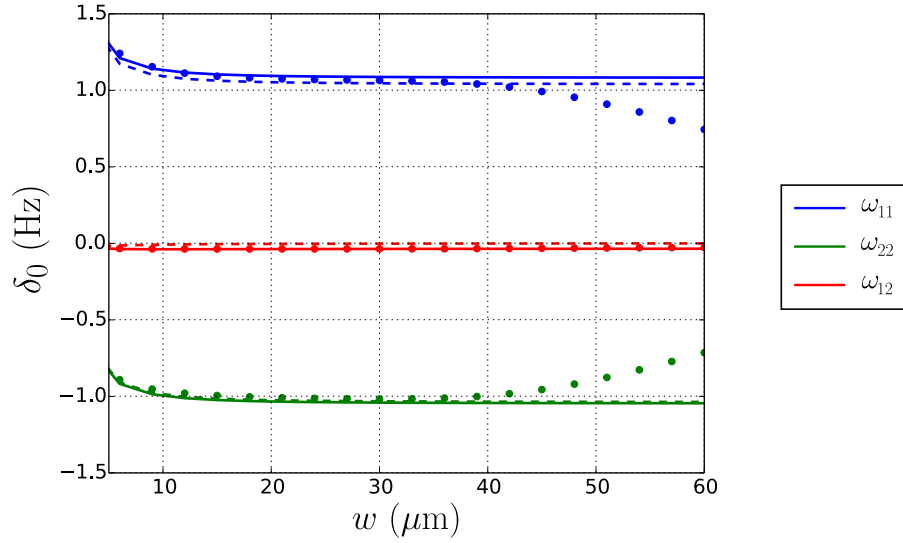


Fig. 3.15 Position de la frange centrale  $\delta_0$  en fonction de l'extension spatiale des nuages. La contribution de  $\omega_{11}$  (respectivement  $\omega_{22}$  et  $\omega_{12}$ ) est représentée en bleu (resp. vert et rouge).

tions ont été représentées. On a aussi tracé le modèle ne tenant pas compte de la phase due aux transitions Raman.

On peut clairement identifier trois régimes. Le premier est obtenu lorsque l'on se place dans les conditions que nous avons considérées depuis le début, c'est-à-dire lorsque les temps d'évolution libre  $T$  et  $T'$  sont suffisamment grands par rapport au temps de recouvrement  $w/2v_r$  pour que les paquets se séparent complètement, et donc que l'on puisse les considérer, pour chaque impulsion Raman, indépendants. Ce régime correspond à la plage centrale de la figure (pour  $w$  entre 15 et 35  $\mu\text{m}$ ), où les différentes phases ne varient pas.

Un deuxième régime peut être identifié pour les faibles valeurs de  $w$ . Celui-ci peut être expliqué en considérant la distribution de vitesse du paquet. Plus la distribution spatiale du nuage est piquée, plus sa distribution en vitesse sera étalée. Ainsi, en augmentant la dispersion en vitesse dans le paquet, on augmente le nombre d'atomes qui ne sont pas résonants avec la transition Raman, conduisant à une valeur d'efficacité  $\alpha$  modifiée. L'enveloppe du nuage est gaussienne et donnée par l'expression (3.1.5). On en déduit la distribution correspondante

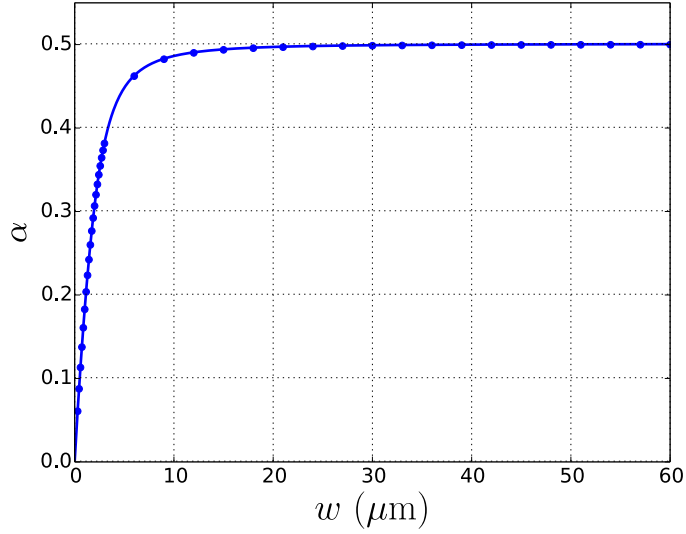


Fig. 3.16 Efficacité d'une impulsion  $\pi/2$  en fonction de l'étalement spatial du nuage. Les résultats de l'intégration numérique correspondant à l'expression (3.2.12) figurent en trait plein. Les résultats donnés par la résolution numérique des équations de Gross-Pitaevskii couplées correspondent quant à eux aux points.

dans l'espace des vitesses, qui est donnée par :

$$|\tilde{\Phi}(v,w)|^2 = \frac{mw}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(-\left(\frac{mwv}{\sqrt{2}\hbar}\right)^2\right). \quad (3.2.10)$$

On sait de plus que la probabilité pour un atome dans l'état  $|1\rangle$  d'effectuer la transition vers l'état  $|2\rangle$  au bout du temps  $\tau$  est donnée par :

$$P(v,\tau) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \delta^2} \sin^2\left(\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}\tau/2\right), \quad (3.2.11)$$

où le désaccord  $\delta$  est donné par  $\delta = 2v_r mv/\hbar$ . L'efficacité de l'impulsion Raman, autrement dit la probabilité pour un atome dans l'état  $|1,p\rangle$  d'effectuer la transition dépend de l'extension spatiale  $w$  du nuage et est donnée par :

$$\alpha(w,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(v,\tau) |\tilde{\Phi}(v,w)|^2 dv. \quad (3.2.12)$$

Cette intégrale peut se calculer numériquement. La figure 3.16 compare l'effi-



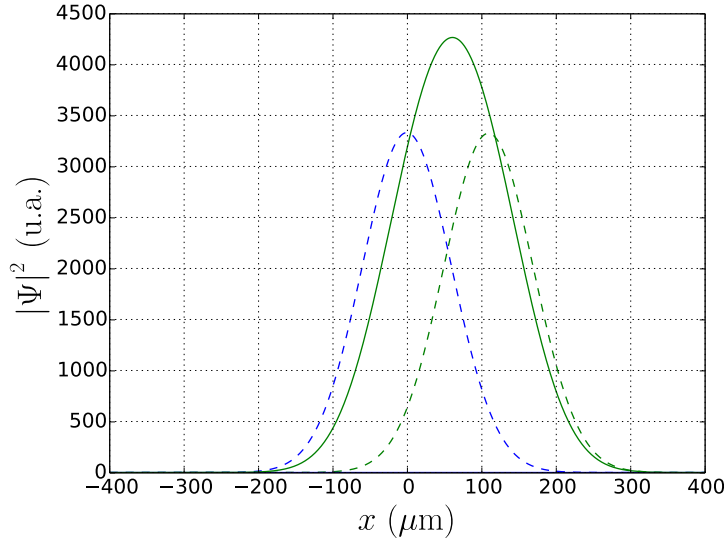


Fig. 3.17 *Fonctions d'onde des deux états avant (lignes pointillées) et après (traits pleins) la deuxième impulsion Raman. Les paquets ne sont pas suffisamment séparés et se recombinent pour donner un seul et unique nuage.*

cacité pour  $\tau = \tau_{\pi/2}$  calculée à partir de la formule (3.2.12) avec celle obtenue par simulation d'une impulsion Raman, en fonction de la taille  $w$ . En calculant l'efficacité de cette manière, on conserve un bon accord entre notre modèle et la simulation dans la figure 3.15.

Enfin, un dernier régime apparaît lorsque le temps  $T$  n'est pas suffisant pour que les paquets ne se recouvrent plus lors des impulsions Raman. Notre modèle ne peut pas rendre compte de ce régime. En effet, lors de la seconde impulsion Raman, les paquets ne peuvent plus être considérés indépendants. La figure 3.17 montre que dans la limite où leur distance de séparation devient très faible, les deux paquets se mélangent lors de la seconde impulsion Raman. A la fin de celle-ci, on n'obtient qu'un seul paquet dans chacun des états  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$ . Après que les atomes dans  $|1\rangle$  ont été poussés, il ne reste qu'un nuage dans  $|2\rangle$  qui subit la deuxième séquence de Ramsey. Ce régime tend donc vers la situation où un paquet initialement dans  $|2\rangle$  subit deux impulsions Raman séparées de la durée  $T$ . Dans cette limite, la position de la frange centrale sera donnée par :

$$\delta_0 = \left( \phi_{2 \rightarrow 1}^{(3)} - \phi_{2 \rightarrow 2}^{(3)} + \phi_{1,B}^{(\text{III})} - \phi_{2,A}^{(\text{III})} \right) / (2\pi T), \quad (3.2.13)$$

où les termes  $\phi_{2 \rightarrow 1}^{(3)}$  et  $\phi_{2 \rightarrow 2}^{(3)}$  seront donnés par la phase induite par une impulsion Raman sur un nuage initial constitué de  $\alpha(1 - \alpha)N$  atomes. Si l'on néglige ces termes, on obtient :

$$\delta_0 = \alpha(1 - \alpha) \left[ (1 - \alpha)\omega_{22} - \alpha\omega_{11} + (2\alpha - 1) \frac{\sqrt{\pi}w}{4v_r T} \operatorname{erf} \left( \frac{2v_r T}{w} \right) \omega_{12} \right] / (2\pi). \quad (3.2.14)$$

Notre modèle nous permet donc de réaliser une bonne estimation de l'effet systématique induit par les interactions dans la configuration d'un interféromètre de Ramsey-Bordé. On doit cependant veiller à se placer dans la limite d'un condensat dilué, tel que l'énergie des interactions puisse n'être considérée que comme une perturbation par rapport au cas d'un nuage d'atomes froids. On doit de plus choisir les temps caractéristiques de l'interféromètre de façon à être sûr de séparer totalement les paquets. On a de plus estimé que l'on devait obtenir un effet, non négligeable pour la réalisation de mesures de haute précision, de l'ordre de quelques hertz pour des énergies d'interactions elles aussi de l'ordre du hertz, ce qui correspond à des nuages de  $10^5$  atomes de taille caractéristique de la centaine de microns.

### 3.2.4 Configuration « gravimètre »

On peut de plus étudier l'effet du champ moyen d'interactions au sein d'un interféromètre constitué de la séquence d'impulsions  $\pi/2 - \pi - \pi/2$ . La figure 3.18 présente les trajectoires et les fractions d'atomes dans chacun des bras de ce type d'interféromètre. On peut définir deux efficacités  $\alpha$  et  $\beta$  correspondant respectivement à celles d'une impulsion  $\pi/2$  ou  $\pi$ , avec :

$$\alpha = \sin^2(\Omega\tau_{\pi/2}/2) \text{ et } \beta = \sin^2(\Omega\tau_{\pi}/2), \quad (3.2.15)$$

où  $\tau_{\pi/2} = \pi/(2\Omega)$  et  $\tau_{\pi} = \pi/\Omega$ . En négligeant les phases acquises pendant les impulsions Raman, et en ne conservant que celles accumulées durant les propagations libres des nuages, on trouve :

$$\Delta\phi = \omega_{11}T(1 - \alpha - \alpha\beta) + \omega_{22}T(\beta - \alpha - \alpha\beta) + \frac{\sqrt{\pi}w}{4v_r} \omega_{12}(4\alpha\beta - 2\beta). \quad (3.2.16)$$

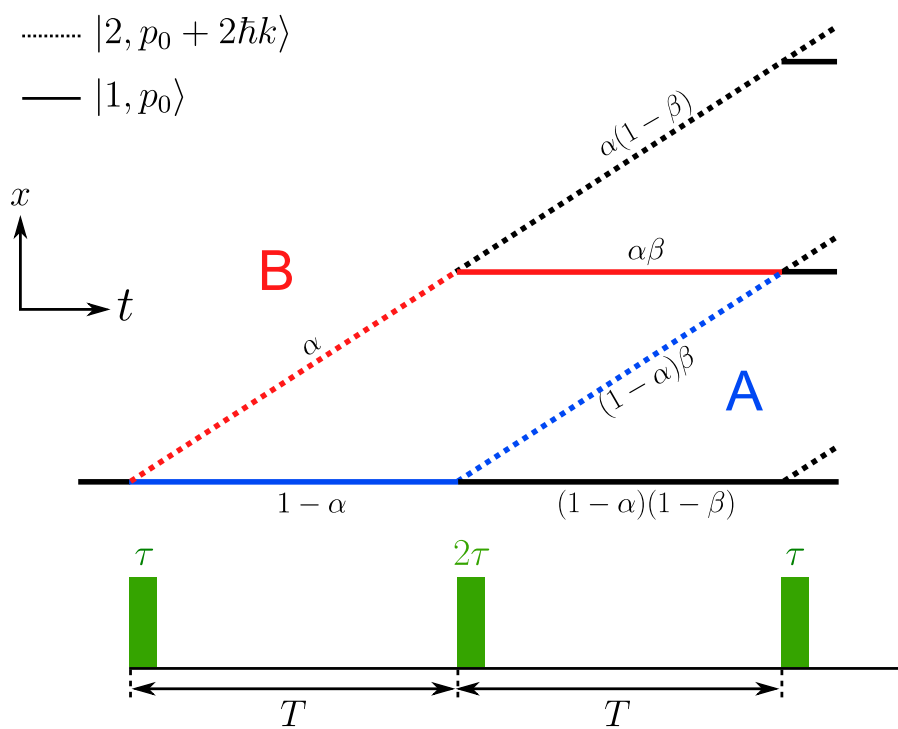


Fig. 3.18 Schéma de la configuration « gravimètre », formée par la séquence  $\pi/2 - \pi - \pi/2$ .

Ainsi, lorsque l'on a exactement  $\alpha = 1/2$  et  $\beta = 1$ , le nombre d'atomes empruntant chacun des chemins est le même. De plus, le chemin  $A$  avant l'impulsion  $\pi$  est le symétrique du chemin  $B$  après l'impulsion  $\pi$ , et réciproquement pour les deux autres portions de  $A$  et  $B$ . Etant donné qu'un même nombre d'atomes emprunte l'un et l'autre bras, on trouve un déphasage nul, la phase acquise pendant la première moitié de l'interféromètre compensant celle acquise durant la seconde moitié. On peut cependant donner une expression prenant en compte l'imprécision sur le nombre d'atomes transférés par les impulsions Raman, comme on l'a fait pour un interféromètre de Ramsey-Bordé précédemment. Au premier ordre, les efficacités  $\alpha$  et  $\beta$  vont respectivement donner  $1/2 + \delta\alpha$  et 1. En développant l'expression (3.2.16) au premier ordre, on trouve :

$$\Delta\phi \simeq \left[ -2(\omega_{11} + \omega_{22})T + \omega_{12} \frac{\sqrt{\pi}w}{v_r} \right] \delta\alpha. \quad (3.2.17)$$

### Application du modèle

On se propose dans la suite d'appliquer le modèle à la fontaine atomique de 10 m, réalisée dans le groupe de Mark Kasevich à Stanford, et dans laquelle la configuration  $\pi/2 - \pi - \pi/2$  est utilisée. Celle-ci vise à effectuer un test du Principe d'Equivalence [Dickerson et al., 2013, Sugarbaker, 2014]. Les atomes sont laissés en chute libre pendant des durées  $T$  de l'ordre de la seconde. Pour de tels temps, on ne peut plus considérer que les nuages ne se déforment pas. En effet, l'étalement balistique des paquets atomiques aura ainsi pour effet d'augmenter les temps de recouvrement et de diluer de plus en plus les nuages. L'effet prédominant sera donné par l'effet des interactions propres des nuages. La fréquence moyenne des interactions diminuant avec le temps, la phase acquise par les deux nuages dans la première moitié de l'interféromètre ( $\pi/2 - \pi$ ) ne pourra plus être compensée par celles acquises pendant la seconde moitié ( $\pi - \pi/2$ ).

### Effet d'étalement des paquets atomiques

En considérant une extension balistique des paquets d'onde atomiques, leur extension spatiale au temps  $t$  sera donnée par :

$$w = w_0 \sqrt{1 + (t/t_{\text{ext}})^2}, \quad (3.2.18)$$

où l'on a posé le temps caractéristique d'extension donné par  $t_{\text{ext}} = w_0/\Delta v$  avec  $\Delta v$  la dispersion en vitesse du paquet. Si l'on considère un nuage sphérique, on aura  $w_{\perp} = w$  et la pulsation moyenne d'interactions sera donnée au temps  $t$  par :

$$\omega_{ij}(t) = \omega_{ij0} \left(1 + (t/t_{\text{ext}})^2\right)^{-3/2}. \quad (3.2.19)$$

La différence de phase due aux interactions propres à la fin de l'interféromètre sera ainsi donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta\phi^{\text{prop}} = - \left[ \alpha \int_0^T \omega_{22}(t) dt - (1 - \alpha) \int_0^T \omega_{11}(t) dt \right. \\ \left. + \alpha\beta \int_T^{2T} \omega_{11}(t) dt - (1 - \alpha)\beta \int_T^{2T} \omega_{22}(t) dt \right], \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

où les intégrales des pulsations moyennes d'interaction sont données par :

$$\int_0^T \omega_{ii}(t) dt = \omega_{ii0} \int_0^T \left(1 + (t/t_{\text{ext}})^2\right)^{-3/2} dt = \frac{w_0}{w(T)} T, \quad (3.2.21)$$

$$\text{et } \int_T^{2T} \omega_{ii}(t) dt = \omega_{ii0} \int_T^{2T} \left(1 + (t/t_{\text{ext}})^2\right)^{-3/2} dt = \left( \frac{2w_0}{w(2T)} - \frac{w_0}{w(T)} \right) T. \quad (3.2.22)$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \Delta\phi^{\text{prop}} = \frac{w_0}{w(T)} [\omega_{110}(1 - \alpha + \alpha\beta) + \omega_{220}(-\alpha - \beta + \alpha\beta)] T \\ + \frac{2w_0}{w(2T)} [-\omega_{110}\alpha\beta - \omega_{220}(\alpha\beta - \beta)] T. \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Cette expression, comme on s'y attendait, n'est pas nulle pour  $\alpha = 1/2$  et  $\beta = 1$  et donne :

$$\Delta\phi^{\text{prop}} = (\omega_{220} - \omega_{110}) \left( \frac{w_0}{w(2T)} - \frac{w_0}{w(T)} \right) T. \quad (3.2.24)$$

Cette dernière expression correspond bien au fait que les nuages se diluent au cours du temps, diminuant ainsi les interactions entre leurs atomes. On peut là encore développer l'expression (3.2.23) au premier ordre autour de  $\alpha = 1/2$  et

$\beta = 1$ , ce qui nous donne :

$$\Delta\phi^{\text{prop}} \simeq (\omega_{220} - \omega_{110}) \left( \frac{w_0}{w(2T)} - \frac{w_0}{w(T)} \right) T - (\omega_{110} + \omega_{220}) \frac{2w_0}{w(2T)} T \delta\alpha. \quad (3.2.25)$$

Pour les interactions mutuelles, on obtient :

$$\Delta\phi^{\text{mut}} = \frac{\sqrt{\pi}w_0}{4v_r} \omega_{12} \left[ \frac{w_0}{w(T)} (-2 + 4\alpha + 2\beta - 4\alpha\beta) + \frac{2w_0}{w(2T)} (1 - 2\alpha - 2\beta + 4\alpha\beta) \right] T, \quad (3.2.26)$$

qui est nulle pour  $\alpha = 1/2$  et  $\beta = 1$ . Le développement de cette expression nous donne :

$$\Delta\phi^{\text{mut}} \simeq \frac{\sqrt{\pi}w_0}{v_r} \omega_{12} \frac{w_0}{w(2T)} T \delta\alpha. \quad (3.2.27)$$

On obtient finalement l'expression de la phase totale due aux interactions prenant en compte l'étalement spatial des nuages, autour de  $\alpha = 1/2$  et  $\beta = 1$ , qui est donnée par :

$$\Delta\phi \simeq (\omega_{22} - \omega_{11}) \left( \frac{w_0}{w(2T)} - \frac{w_0}{w(T)} \right) T \mp (\omega_{11} + \omega_{22}) \frac{2w_0}{w(2T)} T \delta\alpha \pm \omega_{12} \frac{\sqrt{\pi}w_0}{v_r} \frac{w_0}{w(2T)} T \delta\alpha. \quad (3.2.28)$$

On note que cette expression redonne l'expression (3.2.17) dans la limite où l'extension spatiale des nuages ne dépend plus du temps ( $w(2T) = w(T) = w_0$ ).

La séquence interférométrique Mach-Zehnder a été principalement utilisée pour la mesure de la gravité  $g$ . De plus, actuellement l'une des principales motivations de ce type d'interféromètre est la réalisation de tests du principe d'équivalence. Cependant, une grande sensibilité doit être atteinte afin de pouvoir vérifier l'universalité de la chute libre. Celle-ci est limitée par différents effets systématiques. L'utilisation d'un condensat de Bose-Einstein afin de s'affranchir de ces derniers est un des buts actuels de l'interférométrie atomique pour les mesures de haute précision. En effet, le plus faible étalement spatial des nuages atomiques condensés permet de diminuer l'effet systématique dû à la courbure des fronts d'onde des faisceaux (phase de Gouy). De plus, la technique des séparatrices à large transfert d'impulsion (Large Momentum Transfer Beamsplitters) permet d'augmenter la différence de vitesse entre les bras de l'interféromètre, augmentant ainsi sa sensibilité. De telles séparatrices sont extrêmement sélectives en vitesse. La faible dispersion en vitesse de nuages d'atomes condensés est donc

Table 3.1 *Données des sources atomiques de l'expérience de Stanford*

|               | Source I                  | Source II                 |
|---------------|---------------------------|---------------------------|
| $N$           | $4 \times 10^6$ atomes    | $10^5$ atomes             |
| $\theta$      | 50 nK                     | 3 nK                      |
| $w$           | 400 $\mu\text{m}$         | 60 $\mu\text{m}$          |
| $\omega_{11}$ | 0,294 rad s <sup>-1</sup> | 2,176 rad s <sup>-1</sup> |
| $\omega_{22}$ | 0,278 rad s <sup>-1</sup> | 2,059 rad s <sup>-1</sup> |
| $\omega_{12}$ | 0,286 rad s <sup>-1</sup> | 2,117 rad s <sup>-1</sup> |
| $\Delta\phi$  | $1,43 \pm 1$ mrad         | $6,5 \pm 4,7$ mrad        |

particulièrement propice à l'utilisation d'une telle technique. Deux expériences ont pour objectif de réaliser un test du principe d'équivalence avec un CBE en tant que source atomique : d'une part l'expérience ATLAS à Hannovre, du groupe d'Ernst Rasel [Gaaloul et al., 2014], et d'autre part la fontaine atomique de 10 m du groupe de Mark Kasevich à Stanford [Dickerson et al., 2013, Sugarbaker, 2014].

Dans l'expérience de Stanford, deux sources d'atomes sont disponibles, une à 50 nK et l'autre à 3 nK. Afin de tenir compte de l'étalement spatial de ces deux sources d'atomes pendant la réalisation de l'interféromètre, on détermine leurs temps d'extension caractéristiques tels que  $t_{\text{ext}} = w_0 \sqrt{m/k_B \theta}$  où  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $\theta$  la température. Ces temps d'extension, qui sont respectivement de 180 ms pour la première source et de 110 ms pour la deuxième, sont faibles devant la durée de l'interféromètre ( $2T = 2,3$  s), on s'attend donc à ce que l'effet d'étalement des paquets induise une disymétrie dans l'interféromètre. Les données relatives à ces sources atomiques, ainsi que l'effet des interactions sur la différence de phase associée, sont données dans le tableau 3.1. On considère une imprécision sur l'efficacité des impulsions  $\pi/2$  de l'ordre de  $\delta\alpha = 1\%$ . On trouve ainsi un effet systématique relatif sur la mesure de la gravité  $g$  dû aux interactions entre atomes donné par :

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta(\Delta\phi)}{k_{\text{eff}} T^2}. \quad (3.2.29)$$

On obtient une incertitude relative de  $6,7 \times 10^{-11}$  avec la source I et de  $3 \times 10^{-10}$  avec la source II avec  $\delta\alpha = 1\%$ . Pour une sensibilité visée de l'ordre de  $10^{-15}g$ ,

on aura ainsi un effet systématique très important.

On peut ainsi en conclure que malgré une configuration Mach-Zehnder qui devrait assurer un déphasage nul, hormis en cas de déviation par rapport à la condition  $\alpha = 1/2$ , l'effet d'étalement des nuages, pour des temps de chute libre importants (de l'ordre de la seconde), induit un déphasage de quelques mrad. Celui-ci se traduit par un effet systématique de l'ordre de  $10^{-10}$  ou  $10^{-11}$  suivant la source d'atomes utilisée. Ceci correspond à un effet important étant donnée la précision de l'ordre de  $10^{-15}$  visée.

**Ordre de grandeur de l'effet systématique** Si l'on reprend les deux configurations interférométriques que l'on a considérées jusque là, dans le cas où l'on n'a aucune déviation à la condition  $\pi/2$ , on note que la présence d'interactions entre atomes aura pour effet d'ajouter un déphasage, qui sera nul dans la configuration Mach-Zehnder, mais donné de  $3(\omega_{11} - \omega_{22})T/8$  pour une séquence de type Ramsey-Bordé, ce qui correspond à des valeurs de l'ordre de  $0,02 \times \omega_{11}T$ , pour le cas du rubidium 87 pour lequel  $\omega_{22} = 95 \times \omega_{22}/100,4$ . Ceci se traduira, dans le second cas, par une imprécision de l'ordre de 20 mHz sur la position de la frange centrale, pour des fréquences d'interaction de l'ordre du hertz. Cet effet correspond ainsi à un effet systématique de l'ordre de  $10^{-9}$  en valeur relative sur la mesure de la vitesse de recul, et donc sur la mesure du rapport  $h/m$ . Il s'agit donc d'un effet systématique assez important pour une telle mesure. Si l'on considère une déviation à la condition  $\pi/2$ , cet effet est alors amplifié. En effet, pour une déviation de l'ordre de 1%, l'effet des interactions propres des nuages, toujours de l'ordre de 1 Hz, entraîne un déphasage de l'ordre de 40 mHz pour un interféromètre de Mach-Zehnder dans le cas de l'atome de rubidium 87. Dans le cas d'une séquence Ramsey-Bordé, pour les mêmes paramètres, celles-ci ajoutent un déphasage de l'ordre de 25 mHz qui s'oppose au précédent effet mais ne le compense pas. Le déphasage résultant, de l'ordre de 5 mHz, reste important puisqu'il correspond à un effet relatif de  $3 \times 10^{-10}$  sur la mesure du rapport  $h/m$ .

### 3.2.5 Interféromètre de Ramsey-Bordé utilisant des séparatrices à double diffraction

On considère à présent le même schéma interférométrique que précédemment (Ramsey-Bordé), mais on utilise cette fois des séparatrices atomiques utilisant



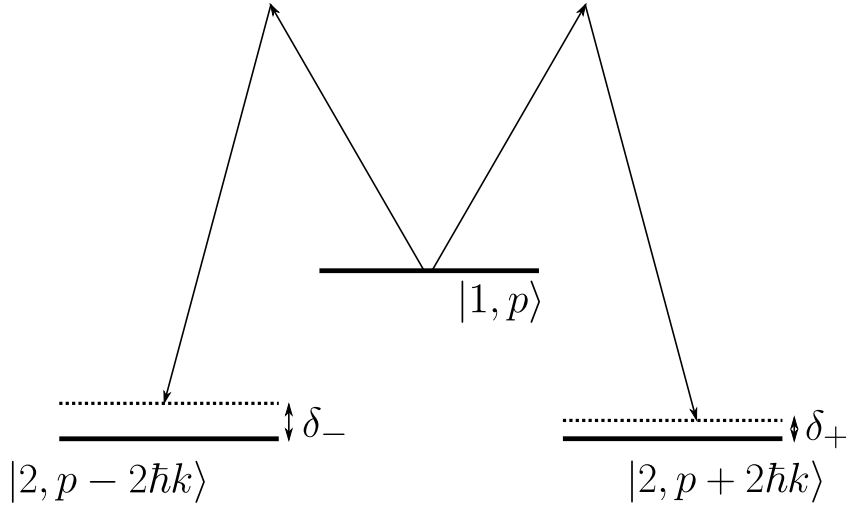


Fig. 3.19 *Principe des transitions Raman utilisées pour réaliser une séparatrice à double diffraction.*

la technique dite de la double diffraction [Malossi et al., 2010]. On commence tout d'abord par décrire le système de façon à modéliser l'interféromètre. On discute ensuite de l'intérêt de ce schéma vis-à-vis de l'effet systématique créé par la présence d'interactions entre atomes.

### Séparatrice Raman à double diffraction

On considère, comme précédemment, un atome possédant deux états internes, que l'on dénote toujours  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$ . Comme dans le cas que l'on a traité jusqu'à maintenant, une paire de faisceaux contre-propageants de désaccord  $\delta_+$  permet de transmettre une impulsion de  $2\hbar k$  aux atomes. Une deuxième paire de faisceaux, dont le désaccord par rapport à la transition est  $\delta_-$ , est ajoutée de façon à transmettre une même impulsion  $2\hbar k$  aux atomes, mais dans le sens opposé. L'état  $|1, p\rangle$  est donc couplé aux deux états  $|2, p \pm \hbar k\rangle$ , selon le schéma présenté dans la figure 3.19. Indépendamment, chacune de ces transitions possède une pulsation de Rabi effective  $\Omega$ .

L'Hamiltonien de ce système, sans la présence d'interactions entre atomes, peut s'écrire dans la base des états  $|1, p\rangle$ ,  $|2, p \pm 2\hbar k\rangle$  de la façon suivante, dans

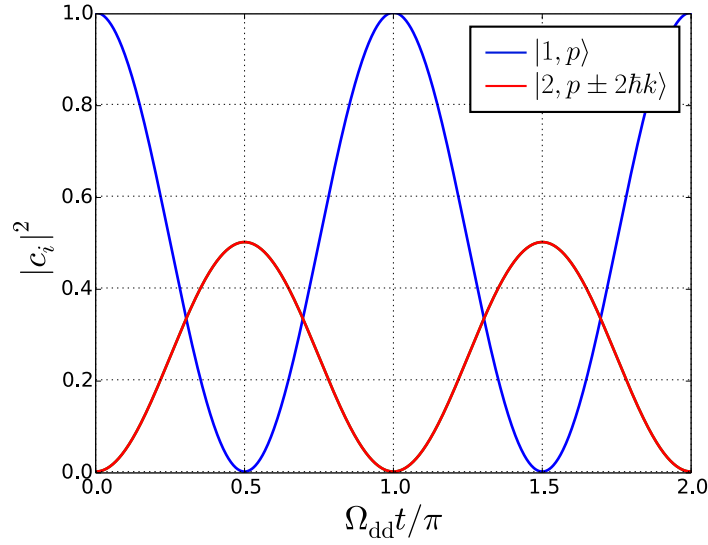


Fig. 3.20 Evolution des populations des états  $|1, p\rangle$  et  $|2, p \pm 2\hbar k\rangle$  au cours du temps, lors d'une impulsion Raman à double diffraction, en partant de l'état initial  $|1, p\rangle$ . Bleu :  $|1, p\rangle$ , Rouge :  $|2, p \pm \hbar k\rangle$ .

le cas où les deux transitions sont à résonance ( $\delta_+ = \delta_- = 0$ ) :

$$H_0 = \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.30)$$

L'opérateur d'évolution  $U_0(t)$  associé à  $H_0$  est donné par :

$$U_0(t) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega_{dd}t/2) & -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin(\Omega_{dd}t/2) & -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin(\Omega_{dd}t/2) \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin(\Omega_{dd}t/2) & \cos^2(\Omega_{dd}t/4) & -\sin^2(\Omega_{dd}t/4) \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin(\Omega_{dd}t/2) & -\sin^2(\Omega_{dd}t/4) & \cos^2(\Omega_{dd}t/4) \end{pmatrix}, \quad (3.2.31)$$

où l'on a posé  $\Omega_{dd} = \sqrt{2}\Omega$ . L'expression (3.2.31) laisse apparaître deux phénomènes d'oscillations de Rabi. Si tous les atomes sont initialement dans l'état  $|1, p\rangle$ , tout se passe comme si l'on avait un système à deux niveaux, et les atomes dans l'état  $|2\rangle$  s'équi-répartissent dans les deux sous-états d'impulsion  $p \pm 2\hbar k$ . La figure 3.20 présente ce phénomène. Lorsque l'on part de  $|2, p + 2\hbar k\rangle$  ou  $|2, p - 2\hbar k\rangle$ , par contre, on observe un phénomène de pseudo-oscillations de Rabi entre les

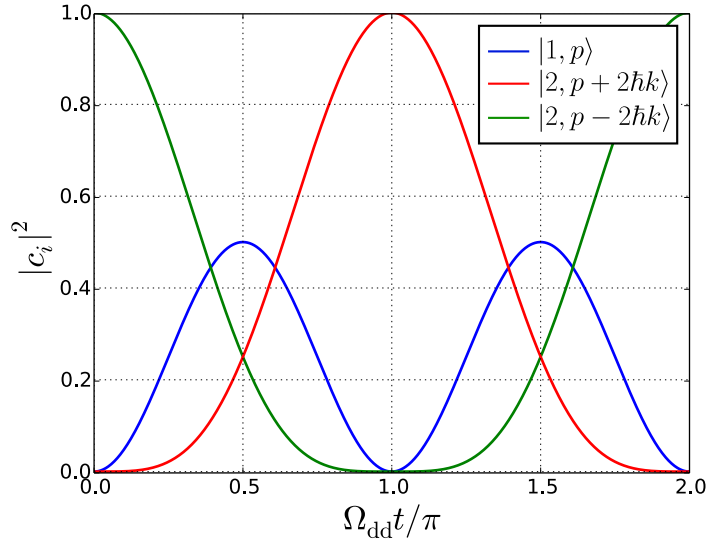


Fig. 3.21 Evolution des populations des états  $|1,p\rangle$  et  $|2,p \pm 2\hbar k\rangle$  au cours du temps, lors d'une impulsion Raman à double diffraction, en partant de l'état initial  $|2,p - 2\hbar k\rangle$ . Bleu :  $|1,p\rangle$ , Vert :  $|2,p + 2\hbar k\rangle$  Rouge :  $|2,p - 2\hbar k\rangle$ .

sous-états  $|2,p \pm 2\hbar k\rangle$  à la pulsation  $\Omega_{dd}/2$ , qui est présenté par la figure 3.21.

On peut définir, comme on l'a fait pour le cas des séparatrices à transition Raman unique, l'efficacité d'une séparatrice atomique à double diffraction. On définit les efficacités  $\alpha$  et  $\beta$  correspondant chacune à une condition initiale. On définit :

$$\alpha \equiv \sin^2(\Omega_{dd}t/2) \text{ et } \beta \equiv \sin^2(\Omega_{dd}t/4), \quad (3.2.32)$$

de telle sorte que l'efficacité des séparatrices à double diffraction dépend de l'état initial du paquet atomique auxquelles elles sont appliquées, comme le montre la figure 3.22.

On peut suivre la même méthode que dans la section 3.1.1 pour modéliser la présence d'interactions au sein du paquet atomique. Celles-ci vont générer un potentiel effectif que l'on pourra écrire, en reprenant les mêmes notations, tel que :

$$V(t) = \begin{pmatrix} V_{1 \rightarrow 1}(t) + V_{2 \rightarrow 1}(t) & 0 & 0 \\ 0 & V_{2 \rightarrow 2+}(t) + V_{1 \rightarrow 2+}(t) & 0 \\ 0 & 0 & V_{2 \rightarrow 2-}(t) + V_{1 \rightarrow 2-}(t) \end{pmatrix}, \quad (3.2.33)$$

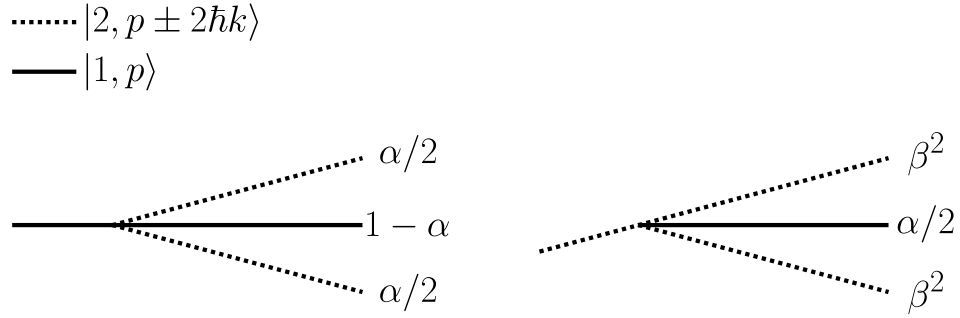


Fig. 3.22 Efficacité d'une impulsion Raman utilisant la double diffraction.

où chaque terme  $V_{2 \rightarrow i}(t)$  est donné par :

$$V_{2 \rightarrow i}(t) = V_{2+ \rightarrow i}(t) + V_{2- \rightarrow i}(t). \quad (3.2.34)$$

En utilisant l'expression (3.1.29), on pourrait déterminer les éléments de matrice de l'ordre 1 du développement de l'opérateur d'évolution. Au regard du cas de la simple diffraction que l'on a traité dans la section 3.1.1, et du fait que les deux états  $|2, +\rangle$  et  $|2, -\rangle$  sont parfaitement symétriques, les phases qu'ils vont acquérir pendant l'impulsion sous l'effet du champ moyen seront égales. On peut donc se dispenser d'aller plus loin dans le calcul de ces phases.

### Interféromètre de Ramsey-Bordé avec séparatrices atomiques utilisant la double diffraction

La même séquence interférométrique qu'auparavant, constituée de deux paires d'impulsion est utilisée. Un schéma de l'interféromètre est donné en figure 3.23. Afin d'éviter d'obtenir des interféromètres parasites, les atomes dans le niveau  $|1\rangle$  sont poussés après les première et troisième impulsions Raman. On considère toujours le régime où les temps de séparation des nuages sont suffisamment longs pour que les paquets puissent être considérés indépendants.

On considère tout d'abord les phases acquises par les nuages de chacun des chemins  $A$  et  $B$  pendant les séparatrices à double diffraction. La première impulsion sépare le paquet en trois nuages, dont seuls les deux correspondant au niveau  $|2\rangle$  sont gardés. Etant donnée la symétrie entre les deux sous-états  $|2, +\rangle$  et  $|2, -\rangle$ , la même phase sera imprimée sur chacun des nuages. On peut constater que les bras  $A$  et  $B$  sont parfaitement symétriques en nombre d'atomes quelle

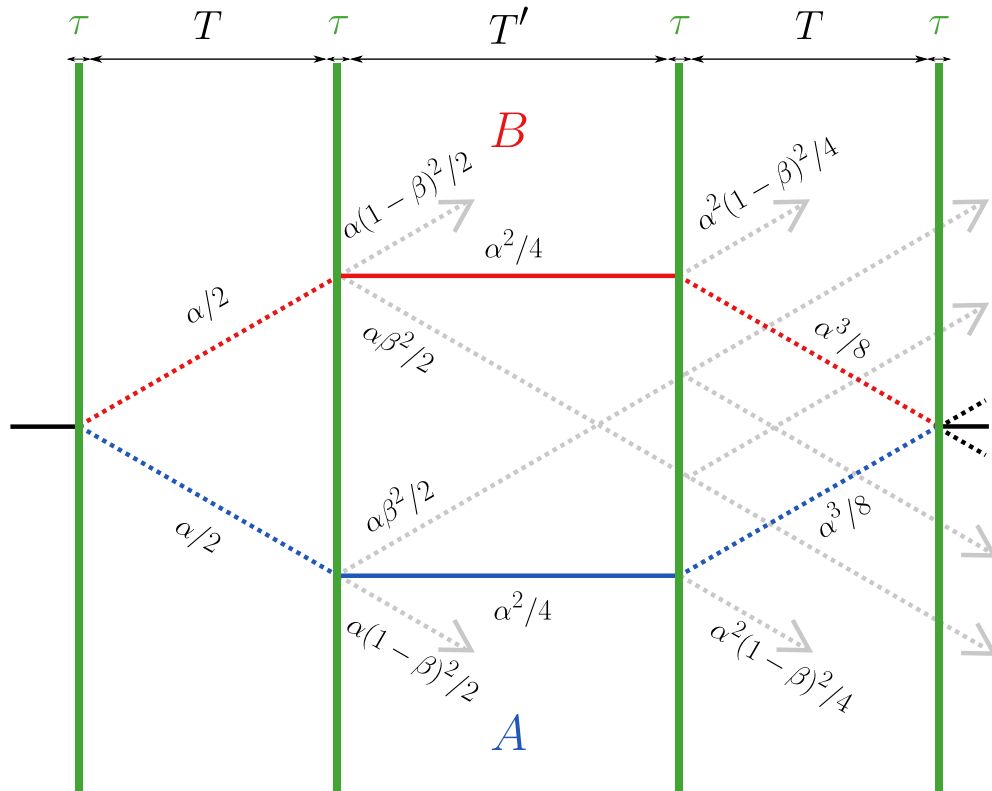


Fig. 3.23 Schéma de l'interféromètre de Ramsey-Bordé utilisant la double diffraction.

que soit la durée  $\tau$  des impulsions Raman, ainsi qu'en terme des sous-états dans lesquels se trouvent les atomes. On peut donc en déduire directement que toutes les phases accumulées lors des impulsions Raman par le bras  $A$  sont égales à celles du bras  $B$ . Si l'on considère maintenant les phases de propagation libre, on peut tout de suite éliminer la contribution des interactions propres, qui ne dépend que de l'état et du nombre d'atomes, les bras étant symétriques l'un par rapport à l'autre. Les interactions mutuelles peuvent elles aussi être éliminées en utilisant le même argument, et le fait que les sous-états  $|2, \pm\rangle$  sont symétriques en vitesse. Les recouvrements entre les paquets seront là encore symétriques entre les deux bras.

Les deux bras accumulent ainsi la même phase sous l'effet des interactions. On aura donc, après leur recombinaison, une phase complètement indépendante des interactions. De plus, celle-ci restera indépendante du champ moyen même dans le cas où les impulsions Raman ne sont pas de même durée. Ceci n'est cependant vrai que dans le cas où les atomes dans l'état  $|1\rangle$  sont poussés après la première et la troisième impulsion. Ce schéma d'interféromètre, aussi bien en configuration Ramsey-Bordé ou Mach-Zehnder (que l'on n'a pas considéré ici, mais pour lequel un raisonnement équivalent peut être effectué), permet de s'affranchir de l'effet des interactions entre atomes. Une étude expérimentale préliminaire a été réalisée sur l'expérience  $h/m$ , avec une source d'atomes non condensés [Andia, 2015], qui permettra à terme l'implémentation d'un schéma d'interféromètre utilisant des séparatrices à double diffraction dans la nouvelle expérience de l'équipe, que nous présentons au chapitre 4.

**Conclusion** Nous avons présenté un modèle théorique permettant de déterminer précisément le déphasage induit par les interactions entre atomes pour un condensat de Bose-Einstein dilué où les interactions ne dominent pas les autres énergies du système. Ce modèle s'appuie sur une approche perturbative, dans laquelle on considère que l'effet des interactions se traduit uniquement par un déphasage des fonctions d'onde atomiques. Le modèle permet de donner des expressions simples et analytiques de ce déphasage, en fonction des différents paramètres expérimentaux, pour les différentes situations rencontrées dans les séquences interférométriques, et celles-ci sont en bon accord avec les résultats d'une simulation numérique permettant de résoudre les équations de Gross-Pitaevskii couplées. Nous montrons de plus que ce déphasage dépend du nombre d'atomes

transférés dans chacun des chemins interférométriques. Nous obtenons ainsi des expressions simples et précises permettant d'estimer le déphasage induit par le champ moyen d'interactions, aussi bien pour un interféromètre de Ramsey-Bordé que pour une configuration « gravimètre ». Nous montrons l'importance de la symétrie entre les deux bras interférométriques au cours de la séquence temporelle. Nous utilisons les données expérimentales de l'interféromètre de 10 m réalisé à Stanford par le groupe de Mark Kasevich, dont l'objectif est d'obtenir une sensibilité de l'ordre de  $10^{-15}g$ , pour déterminer un effet systématique relatif de l'ordre de  $7 \times 10^{-11}$  ou  $3 \times 10^{-10}$  sur la mesure de  $g$ , selon la source atomique utilisée pour réaliser l'expérience, en considérant une déviation de l'ordre de 1% par rapport à la condition  $\pi/2$ . Enfin, nous montrons, grâce à notre modèle, qu'un interféromètre de type Ramsey-Bordé symétrique, utilisant des séparatrices à double diffraction, permettrait de s'affranchir totalement de l'effet systématique créé par les interactions entre atomes.

## Chapitre 4

# Conception d'un nouveau dispositif expérimental

L'un des axes majeurs de ce travail de thèse correspond à la conception et la réalisation d'un nouveau dispositif expérimental visant à produire un condensat de Bose-Einstein pour l'interférométrie atomique. En effet, la source atomique utilisée jusqu'à présent afin de déterminer des mesures du rapport  $h/m$  ou de l'accélération de la pesanteur  $g$  est obtenue en effectuant une mélasse optique, en ayant préalablement piégé les atomes dans un piège magnéto-optique, permettant de produire des sources atomiques à des températures de l'ordre de  $4\mu\text{K}$ . Cependant, la température et la taille de celles-ci sont des facteurs limitant la précision des mesures.

La première étape de ce travail a été constituée par la conception entière du dispositif expérimental, et plus particulièrement de l'enceinte à vide, qui a été dessinée sous Catia<sup>TM</sup>. La fabrication de l'ensemble des pièces destinées à l'expérience a ensuite occupé un temps assez important, que nous avons mis à contribution en travaillant à des mesures de fréquences sur l'expérience existante, et qui ont contribué à la démonstration expérimentale d'un nouveau schéma de gravimètre compact [Andia et al., 2013].

Dans ce chapitre, nous décrirons tout d'abord les mesures de fréquences que nous avons effectuées pour l'expérience  $h/m$  existante, en parallèle de la construction de la nouvelle expérience. Nous décrirons ensuite le dispositif expérimental que nous avons réalisé, dans le but d'obtenir un condensat de Bose-Einstein de  $^{87}\text{Rb}$  : d'abord nous décrirons l'enceinte à vide ainsi que le système de refroidissement laser qui a été réalisé pour l'expérience. Nous caractérisons ensuite



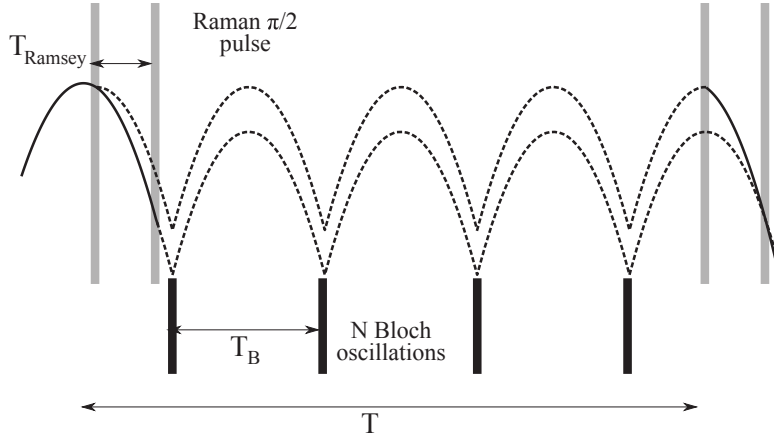


Fig. 4.1 Schéma de l'interféromètre réalisé dans la configuration gravimètre, utilisant une séquence d'impulsions Bloch afin de maintenir les atomes dans une zone haute de 5 mm.

la source d'atomes thermiques obtenue grâce à ce système. Enfin, nous détaillerons le piège dipolaire optique au sein duquel le refroidissement évaporatif sera effectué.

## 4.1 Gravimètre compact fondé sur les oscillations de Bloch : Mesures absolues des fréquences

Dans cette section, nous décrivons le travail que nous avons effectué sur le contrôle des fréquences de l'expérience  $h/m$ . Ce travail a contribué à la démonstration d'un schéma de gravimètre compact utilisant les oscillations de Bloch afin de maintenir les atomes en chute libre (voir figure 4.1) sur une hauteur de l'ordre de 5 mm [Andia et al., 2013]. Une mesure préliminaire de  $g$  a permis d'atteindre une sensibilité de  $7,4 \times 10^{-7}$  à 1 s d'intégration, qui pourra être améliorée une fois l'implémentation de ce schéma sur le nouveau dispositif expérimental. Nous ne détaillerons pas ici le principe de ce gravimètre, qui pourra être trouvé dans la thèse de Manuel Andia. Nous détaillerons le dispositif permettant le contrôle et la mesure absolue des fréquences utilisées dans cette expérience, ainsi que les améliorations qui lui ont été apportées, et les mesures réalisées. Nous pouvons cependant préciser que la réalisation d'un tel schéma d'interféromètre nécessite l'utilisation de deux faisceaux lasers, asservis en phase, permettant de réaliser les transitions Raman, ainsi que d'un troisième permettant de réaliser le réseau

optique Bloch. Pour cela, l'équipe a utilisé deux diodes lasers en cavité étendue, asservie en phase afin de contrôler leur désaccord, dans le but de réaliser les transitions Raman. Il n'est donc nécessaire, pour que l'expérience fonctionne, que de fixer très précisément la fréquence de l'une des deux, que nous dénommons Raman 1. Le réseau Bloch est lui issu d'un laser TiSa conçu par François Biraben.

Le principe du contrôle des fréquences de l'expérience repose sur l'utilisation d'une cavité stable asservie sur la fréquence d'un laser étalon. Il est alors possible de se servir de celle-ci comme d'une « règle » pour la mesure et le contrôle des fréquences, en asservissant les lasers utilisés dans l'expérience sur un pic bien précis, permettant alors une grande précision sur leur fréquence.

#### 4.1.1 Laser étalon de fréquence

Le principe du laser étalon que nous utilisons repose sur celui détaillé dans [De Beauvoir, 1996], utilisant une transition à deux photons du rubidium à 778 nm.

Le signal de référence est émis par une diode laser montée en cavité étendue, selon un schéma similaire à celui que nous avons utilisé pour les sources lasers maître et repompeur de la nouvelle expérience et qui sera détaillé dans la suite de ce chapitre. Une partie du faisceau est ensuite récupérée et effectue un double passage à travers un modulateur acousto-optique dont seul l'ordre -1 est récupéré. Sa fréquence est alors diminuée de 160 MHz. Il est ensuite injecté dans une cavité Fabry-Perot au sein de laquelle est placée une cellule de rubidium. Autour de celle-ci, un photo-multiplicateur permet de détecter la fluorescence de désexcitation à 420 nm (voir figure 4.2). Enfin, une photodiode permet de détecter le signal transmis par la cavité. Un schéma général du montage est présenté en figure 4.3.

La cavité est asservie sur la fréquence de la diode laser afin d'être toujours résonante avec celle-ci, grâce à une détection synchrone avec une modulation de 100 kHz. En balayant la longueur de la cavité étendue de la diode laser, on peut visualiser le spectre des transitions  $5S_{1/2} - 5D_{5/2}$  (figure 4.4). La diode est asservie sur la raie la plus intense, correspondant à la transition  $5S_{1/2}(F = 3) \rightarrow 5D_{5/2}(F = 5)$  du  $^{85}\text{Rb}$ .

La fréquence de ce laser de référence a été comparée par battement optique à

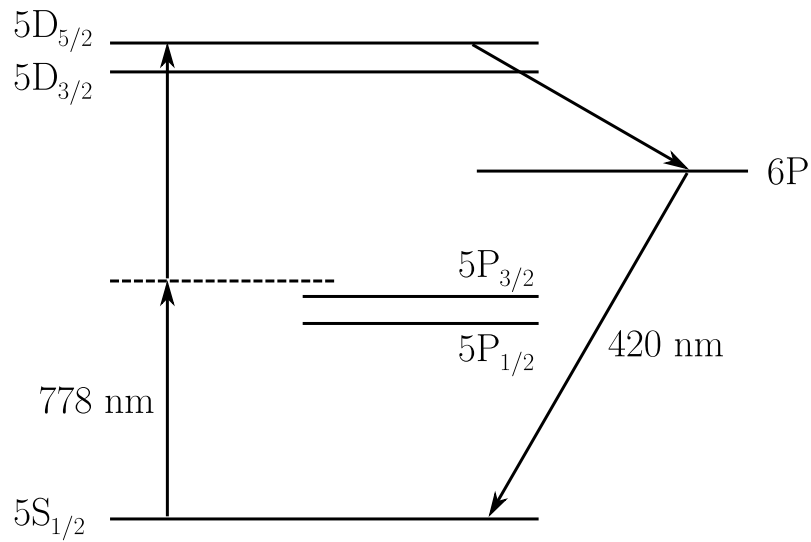


Fig. 4.2 Niveaux d'énergie du rubidium.

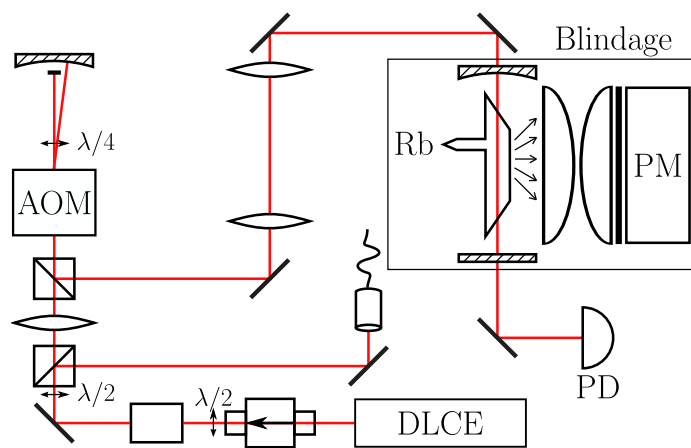


Fig. 4.3 Schéma de l'étalon de fréquence à 778 nm.

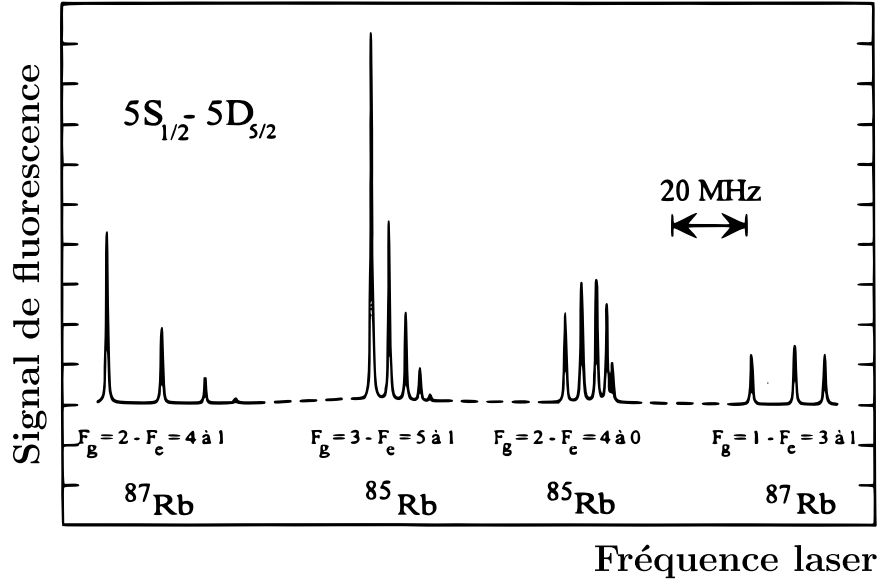


Fig. 4.4 Spectre des transitions  $5S_{1/2} - 5D_{5/2}$  du rubidium (tiré de [De Beauvoir, 1996]).

celle d'une source similaire, présentée dans la thèse de Sandrine Galtier [Galtier, 2014], possédant une stabilité de 400 Hz à 1 s. Nous obtenons ainsi un battement à 320 MHz, dont nous pouvons déterminer la stabilité. La figure 4.5 présente l'écart-type d'Allan de ce battement. Nous en déduisons une stabilité de 780 Hz à 1 s, ainsi que la fréquence de notre laser étalon :

$$\nu_{\text{étalon}} = \nu_{2p} + 2 \times \nu_{\text{AOM}} = 385\,285\,302\,370,0 \pm 0.8 \text{ kHz.} \quad (4.1.1)$$

### 4.1.2 Contrôle des fréquences

Le contrôle des fréquences des lasers utilisés dans l'expérience est effectué grâce à une cavité ultra-stable asservie sur la fréquence du laser étalon. Celle-ci est constituée de deux miroirs diélectriques de coefficients de réflexion 0,99 et 0,998 à 780 nm, et possède une finesse de  $\mathcal{F} = 260$ . Son intervalle spectral libre (ISL) est de l'ordre de 3 GHz (correspondant à une longueur de la cavité de  $L \simeq 5$  cm). La cavité est elle-même placée dans une enceinte ultra-vide à  $10^{-7}$  mbar. Les lasers Raman 1 et TiSa sont asservis par la technique de Pound-Drever-Hall sur un pic de la cavité. La figure 4.6 présente un schéma du banc de la cavité ultra-stable.

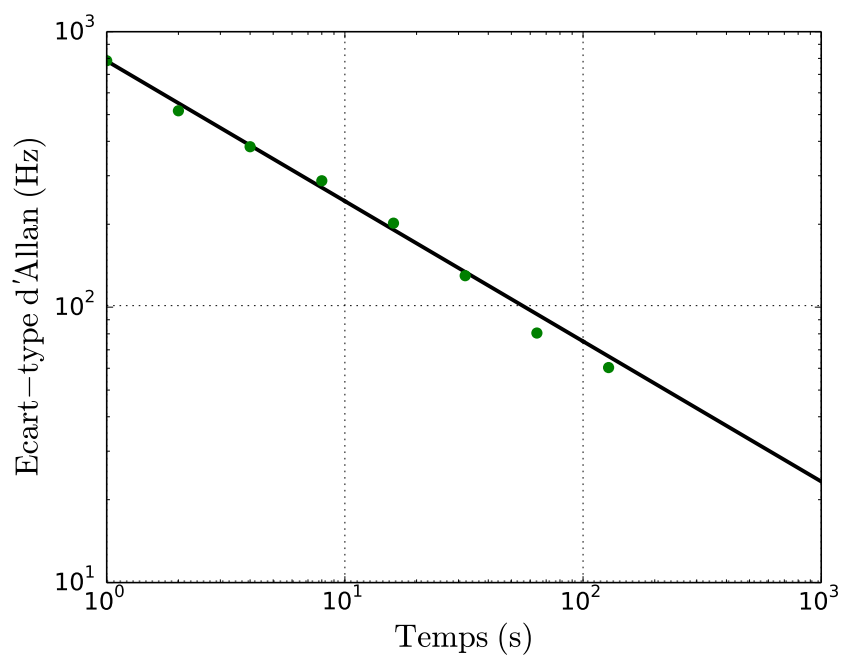


Fig. 4.5 *Ecart-type d'Allan du laser étalon.*

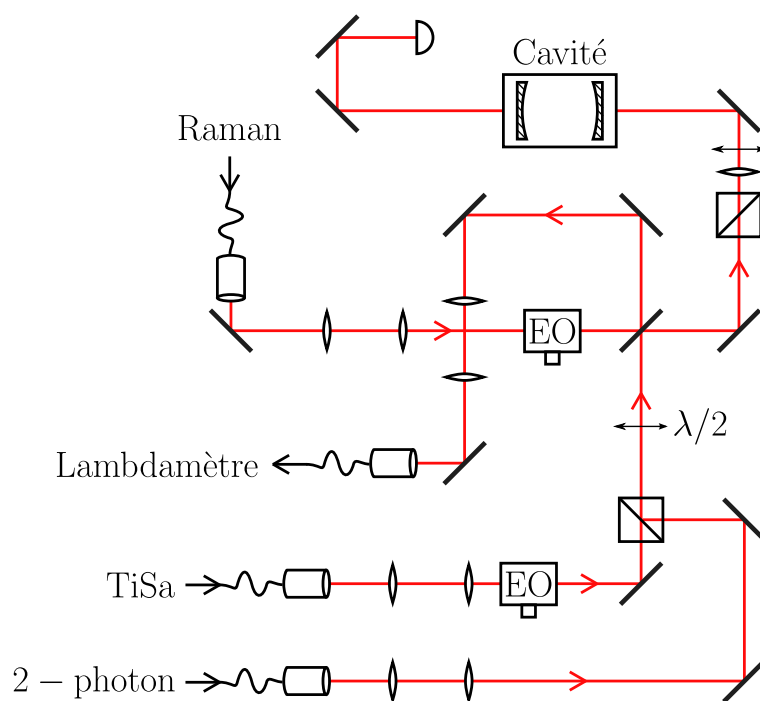


Fig. 4.6 *Banc de la cavité ultra-stable permettant le contrôle des fréquences.*

### Asservissement par la technique de Pound-Drever-Hall en transmission

La technique de Pound-Drever-Hall [Black, 2001] permet de stabiliser des fréquences lasers en les asservissant sur une cavité. La lumière laser est modulée en phase à l'aide d'un modulateur électro-optique, son spectre est alors constitué d'une fréquence porteuse et de deux bandes latérales, avant d'être envoyée dans une cavité. En général, la lumière réfléchiée par la cavité est ensuite mesurée par une photodiode rapide avant d'être mixée avec le signal d'un oscillateur en phase avec la modulation. Le signal est ensuite filtré afin de ne récupérer que la partie à basse fréquence, qui donne une mesure de combien la fréquence porteuse est hors résonance par rapport à la cavité.

Si l'on considère le champ à la sortie des modules électro-optiques, celui-ci est donné par :

$$\begin{aligned} E_i &= E_0 e^{i(\omega t + \beta \sin(\omega_m t))} \\ &\simeq E_0 (1 + i\beta \sin(\omega_m t)), \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

ce que l'on peut réécrire en faisant apparaître les trois composantes aux fréquences  $\omega$ ,  $\omega + \omega_m$  et  $\omega - \omega_m$  :

$$E_i = E_0 \left( e^{i\omega t} + \frac{\beta}{2} e^{i(\omega + \omega_m)t} - \frac{\beta}{2} e^{i(\omega - \omega_m)t} \right). \quad (4.1.3)$$

Après avoir été réfléchi ou transmis par la cavité, le champ est alors donné par :

$$E_f = E_0 \left( F(\omega) e^{i\omega t} + \frac{\beta}{2} F(\omega + \omega_m) e^{i(\omega + \omega_m)t} - \frac{\beta}{2} F(\omega - \omega_m) e^{i(\omega - \omega_m)t} \right), \quad (4.1.4)$$

où  $F(\omega)$  est la fonction de transfert de la cavité (en réflexion ou en transmission, selon le signal d'intérêt). Le signal de la photodiode sera alors  $\propto |E_f|^2$ . Une fois mixé avec un signal de la forme  $V_m(t) \propto \cos(\omega_m t + \varphi)$ , puis filtré, on n'aura plus que la partie du signal qui n'oscille pas (le détail du calcul peut être trouvé dans [Black, 2001]) et qui est telle que :

$$V(\omega) \propto \text{Re}\{\chi(\omega)\} \cos \varphi + \text{Im}\{\chi(\omega)\} \sin \varphi, \quad (4.1.5)$$

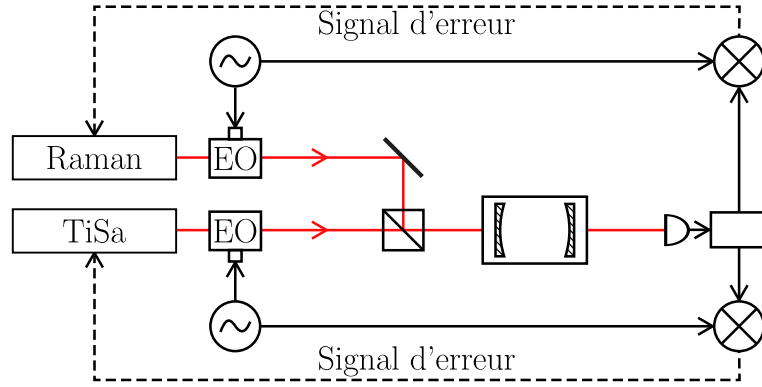


Fig. 4.7 Schéma des asservissements des lasers sur la cavité ultra-stable.

avec  $\chi(\omega) = F(\omega)F^*(\omega + \omega_m) - F^*(\omega)F(\omega - \omega_m)$ .

La première version des asservissements des lasers sur la cavité ultra-stable était réalisée en récupérant la partie réfléchiée par la cavité qui était envoyée vers une photodiode rapide pour générer le signal d'erreur. Nous avons cependant constaté la présence d'une modulation parasite dans les signaux générés de cette façon. Celle-ci a pu être éliminée en utilisant les signaux transmis par la cavité pour réaliser l'asservissement par la technique de Pound-Drever-Hall. La fonction de transfert  $F(\omega)$  de la cavité est alors donnée par :

$$F(\omega) = \frac{e^{2iL\omega/c}}{1 - r_1 r_2 e^{2iL\omega/c}}, \quad (4.1.6)$$

avec  $L$  la longueur de la cavité. Le schéma des asservissements des deux lasers TiSa et Raman sur la cavité par Pound-Drever-Hall en transmission est représenté en figure 4.7.

Les figures 4.8 et 4.9 présentent les signaux d'erreur générés par le nouveau système en transmission, ainsi que les ajustements numériques obtenus en incorporant la fonction de transfert en transmission de la cavité dans la formule du signal d'erreur (4.1.5). Nous vérifions ainsi que le signal d'erreur généré par le signal transmis par la cavité est bien adapté pour l'asservissement de nos lasers. De plus, l'élimination de la modulation parasite nous a permis de gagner sur la stabilité de nos lasers. En effet, lorsque les asservissements utilisaient encore les signaux réfléchis par la cavité, une dérive lente des lasers, de l'ordre de 1 kHz/heure, a pu être observée. Celle-ci n'est plus présente avec le nouveau montage.

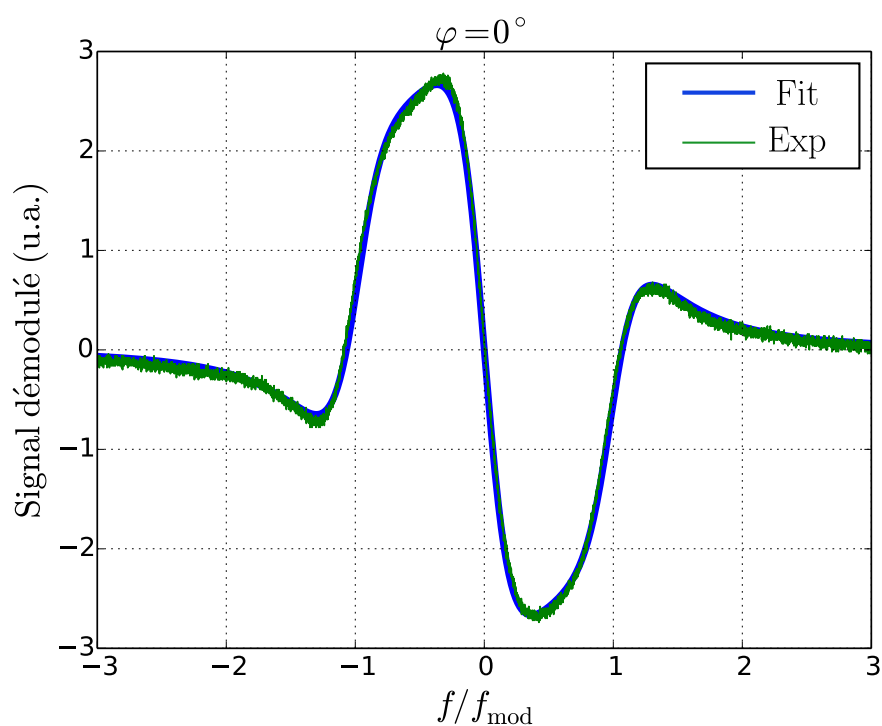


Fig. 4.8 *Signal d'erreur observé à partir du signal transmis par la cavité comparé à un ajustement numérique par l'expression 4.1.5.*



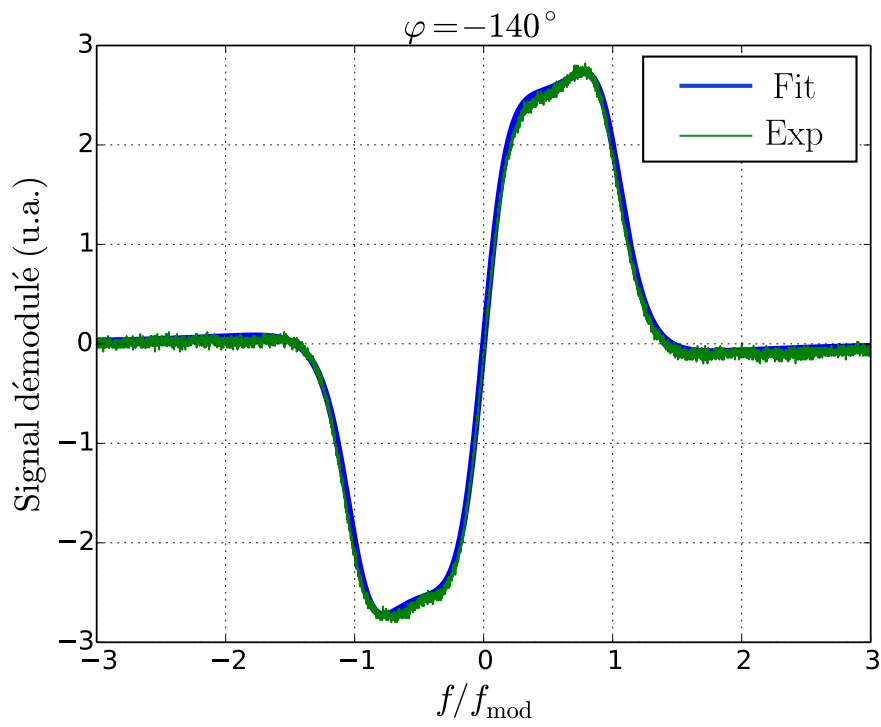


Fig. 4.9 *Signal d'erreur observé à partir du signal transmis par la cavité comparé à un ajustement numérique par l'expression 4.1.5.*

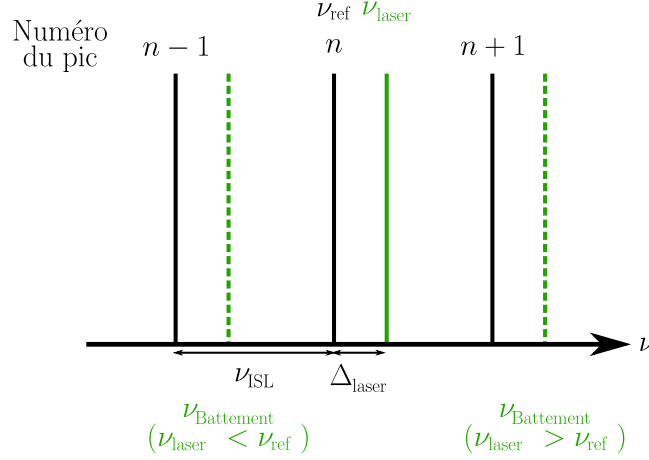


Fig. 4.10 Principe de la détermination des fréquences d'offset par rapport aux pics de la cavité ultra-stable. Nous mesurons les battements à droite et à gauche entre le laser dont nous voulons étalonner la fréquence et la référence. La position du centre de ces deux fréquences de battements nous donne accès à l'offset  $\Delta_{\text{laser}}$ , dont est décalée la fréquence  $\nu_{\text{laser}}$  par rapport à celle de la référence  $\nu_{\text{ref}}$ .

### Calibration de la cavité

La calibration de la cavité a été réalisée en effectuant des battements optiques avec le laser TiSa, dont la longueur d'onde peut être accordée sur une plage de 25 Å. Lorsque la cavité est asservie sur le laser étalon, son intervalle spectral libre (ISL) est fixé et vaut  $\nu_{\text{ISL}} = c/(2L) \simeq 3 \text{ GHz}$ . En plaçant la fréquence du laser TiSa à un pic d'un des deux autres lasers, on peut mesurer l'intervalle spectral libre de la cavité. Comme constaté pendant la thèse de Rym Bouchendira [Bouchendira, 2012], la valeur de l'ISL diffère selon que l'on se place à « droite » ou à « gauche ». Ceci est expliqué par la biréfringence intrinsèque à la cavité qui lève la dégénérescence entre les modes propres de celle-ci, et à sa finesse modérée qui ne permet pas de distinguer leurs pics respectifs.

Nous avons tout d'abord effectué des battements optiques entre le laser « 2 photons » et le laser TiSa positionné à  $\pm 1$  pic de celui-ci. De la mesure de ces battements, nous pouvons déduire la correction à apporter à la fréquence du pic sur lequel nous plaçons le laser TiSa :

$$\nu_{\text{TiSa}} = n_{\text{TiSa}} \cdot \nu_{\text{ISL}} + \Delta_{\text{TiSa}}, \quad (4.1.7)$$

où  $n_{\text{TiSa}}$  est le numéro du pic où se situe le laser TiSa et  $\Delta_{\text{TiSa}}$  correspond au

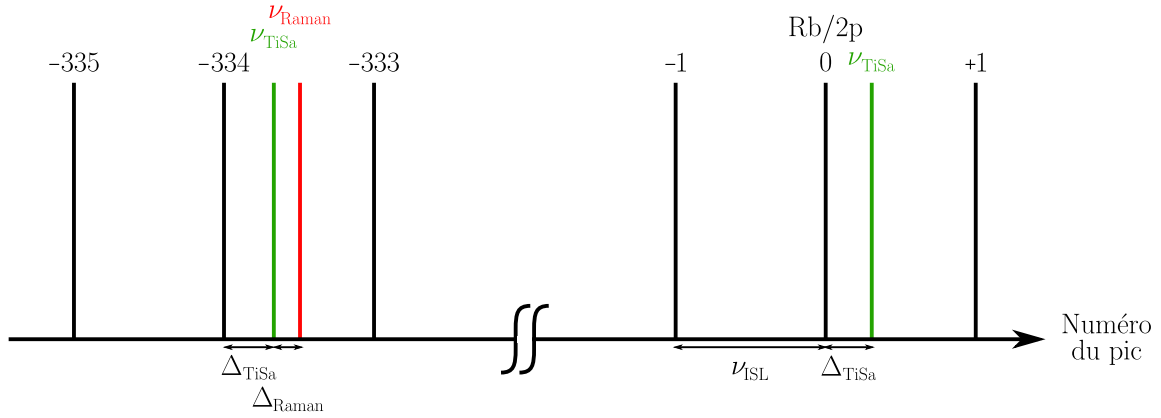


Fig. 4.11 *Principe de la calibration des fréquences mesurées sur la cavité : nous commençons par effectuer deux battements autour du pic 0 correspondant à la fréquence du laser étalon, ce qui nous permet de déduire le décalage en fréquence du laser TiSa par rapport à la cavité. Nous positionnons ensuite le laser TiSa à un ISL du laser Raman. Nous obtenons alors  $\Delta_{\text{Raman}}$  qui correspond au décalage par rapport à  $\nu_{\text{TiSa}}$  accordée sur le pic correspondant, ce qui nous permet de trouver le décalage en fréquence du laser Raman par rapport à la cavité.*

décalage moyen du centre des deux battements mesurés. Nous avons ensuite réalisé la même mesure entre le laser Raman 1 et le laser TiSa, nous permettant d'en déduire la correction à apporter à la fréquence Raman :

$$\nu_{\text{Raman}} = \nu_{\text{TiSa}} + \Delta_{\text{Raman}}, \quad (4.1.8)$$

où  $\nu_{\text{TiSa}}$  est ici la fréquence du laser TiSa sur le pic correspondant à la fréquence du laser Raman (voir la figure 4.11), soit :

$$\nu_{\text{Raman}} = n_{\text{Raman}} \cdot \nu_{\text{ISL}} + (\Delta_{\text{TiSa}} + \Delta_{\text{Raman}}). \quad (4.1.9)$$

Les résultats de ces mesures sont résumés dans le tableau 4.1.

Une fois l'étalonnage de la cavité effectué, nous pouvons déterminer les fréquences des différents lasers. En effet, nous commençons par mesurer la longueur d'onde de chacun des lasers asservis sur la cavité grâce à un lambdamètre. Cette mesure n'est pas précise et nous permet uniquement d'obtenir une indication sur le numéro du pic correspondant de la cavité. Grâce au numéro du pic et la cali-

| Battements   |  |
|--|--|
| Laser étalon   | Laser Raman 1  |
| $\nu_{\text{TiSa}} > \nu_{2p}$ : 2 991 073, 444 kHz                            | $\nu_{\text{TiSa}} > \nu_{\text{Raman}}$ : 2 990 841, 449 kHz                    |
| $\nu_{\text{TiSa}} < \nu_{2p}$ : 2 990 784, 171 kHz                            | $\nu_{\text{TiSa}} < \nu_{\text{Raman}}$ : 2 991 006, 136 kHz                    |
| Offsets  |  |
| $\nu_{\text{TiSa}} = n_{\text{TiSa}} \cdot \nu_{\text{ISL}} + 144 \text{ kHz}$ | $\nu_{\text{Raman}} = n_{\text{Raman}} \cdot \nu_{\text{ISL}} + 227 \text{ kHz}$ |

Table 4.1 Mesures de battements effectuées pour l'étalonnage de la cavité ultra-stable.

| Laser        | Numéro du pic | Fréquence            | Ecart-type<br>d'Allan à 1 s |
|--------------|---------------|----------------------|-----------------------------|
| Etalon       | 0             | 385 285 302, 370 MHz | 780 Hz                      |
| Raman 1      | -334          | 384 286 335, 033 MHz | 2,5 kHz                     |
| Bloch (TiSa) | -342          | 384 262 407, 581 MHz | 2 kHz                       |

Table 4.2 Détermination des fréquences lasers grâce à la cavité stable.

bration de la cavité, nous pouvons remonter à une valeur précise de la fréquence des lasers. Les résultats de ces mesures sont indiqués dans le tableau 4.2.

Les battements optiques nous ont de plus permis de tester la stabilité de nos sources lasers. Les figures 4.12 et 4.13 présentent les écart-types d'Allan des lasers TiSa et Raman asservis sur la cavité.

### Mesure par battement avec un peigne de fréquence

La dernière étape de l'étalonnage de la cavité stable a consisté à effectuer une mesure indépendante de la fréquence du laser Raman. Celle-ci a été réalisée grâce à un peigne de fréquence. Son fonctionnement repose sur la génération d'un train d'impulsions séparés du temps  $\tau$  par un laser femtoseconde, dont le spectre laisse apparaître un peigne de fréquence dont les dents sont séparées du taux de répétition  $f_{\text{rep}} = 1/\tau$ .

La fréquence de la  $n$ -ième dent du peigne est donnée par :

$$f_n = f_0 + n f_{\text{rep}}, \quad (4.1.10)$$

où la fréquence d'offset  $f_0$  naît de la différence entre les vitesses de phase et de groupe du train d'impulsions. La mesure de cette fréquence d'offset est réalisée

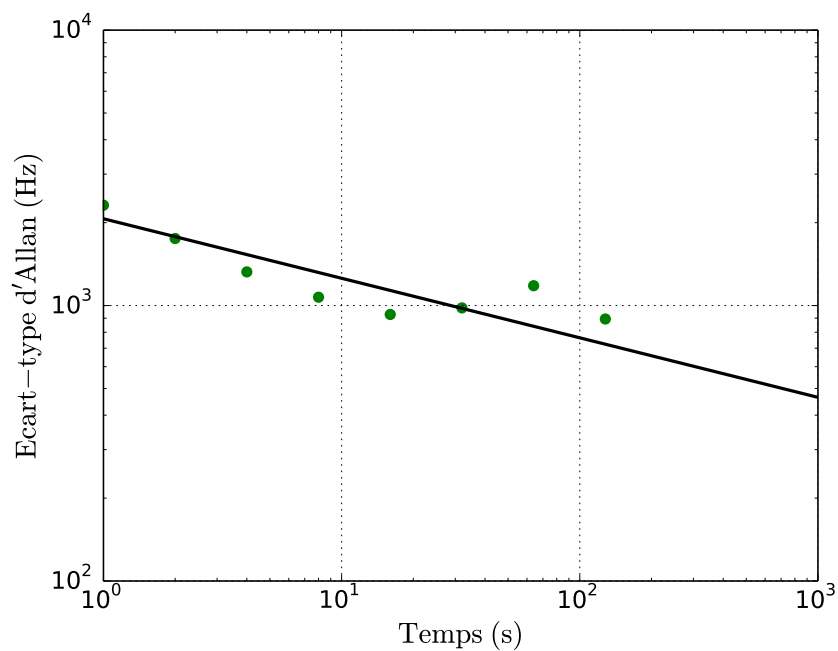


Fig. 4.12 *Ecart-type d'Allan du laser TiSa, accordé sur le pic -1 de la cavité, mesuré par battement avec le laser étalon.*

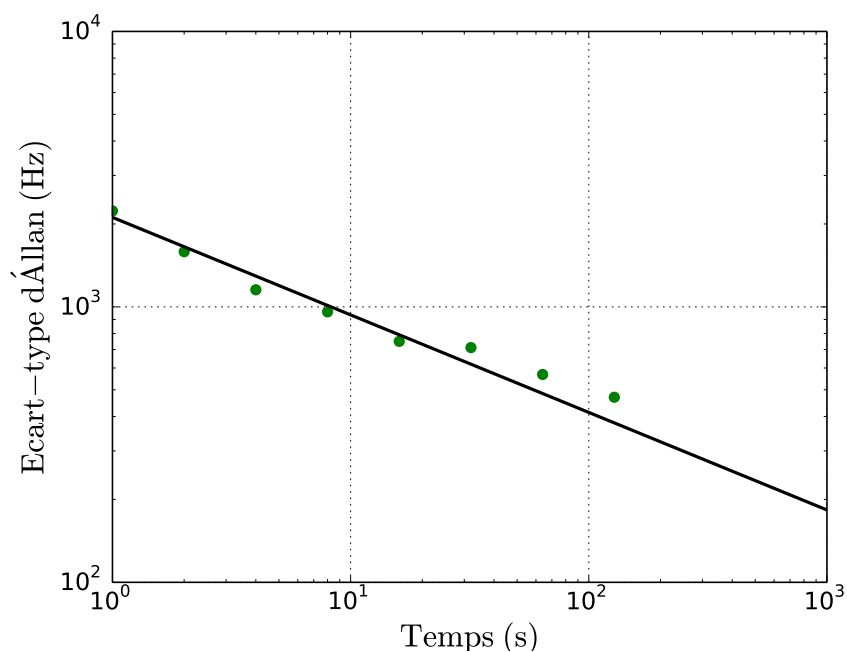


Fig. 4.13 *Ecart-type d'Allan du laser Raman mesuré par battement avec le laser TiSa accordé sur le pic -333 de la cavité.*

en élargissant le spectre du laser femtoseconde en l'injectant dans une fibre à cristal photonique. Le spectre est de plus doublé dans un cristal non-linéaire, de telle façon que la réalisation d'un battement entre la dent  $2n$ , et la dent  $n$  doublée obtenue à partir du spectre élargi, permet d'obtenir :

$$2f_n - f_{2n} = 2(f_0 + nf_{\text{rep}}) - f_0 - 2nf_{\text{rep}} = f_0. \quad (4.1.11)$$

Afin de réaliser la mesure de la fréquence  $f$  de notre laser, nous réalisons un battement avec une dent du peigne de fréquence. La fréquence de ce battement sera donnée par :

$$f_{\text{batt}} = |f - f_n| = |f - f_0 - nf_{\text{rep}}|. \quad (4.1.12)$$

Afin de déterminer les signes de chacun des termes intervenant dans l'expression précédente, nous faisons varier  $f_0$  et  $f_{\text{rep}}$ , et regardons le comportement de  $f_{\text{batt}}$ . Grâce à la cavité stable, nous connaissons au MHz près la fréquence du laser. Nous injectons alors cette valeur attendue dans l'expression (4.1.12) afin d'obtenir une valeur pour  $n$  qui diffère à quelques  $10^{-2}$  d'un entier. La valeur de  $f$  est alors obtenue en reprenant l'expression (4.1.12) en y insérant l'entier le plus proche de la valeur de  $n$  que l'on a déterminée.

Le laser femtoseconde que nous avons utilisé est celui décrit dans la thèse de Sandrine Galtier [Galtier, 2014]. Il s'agit d'un laser de la société MenloSystems, dont le taux de répétition est proche de 250 MHz. Le résultat de la mesure de la fréquence du laser Raman nous donne un accord à 7 kHz près avec celle obtenue grâce à la cavité ultra-stable. Nous avons donc une erreur relative de l'ordre de  $1,8 \times 10^{-11}$  sur nos mesures de fréquence, ce qui est bien inférieur à la précision relative des mesures sur  $\alpha$  et sur  $g$ .

| Méthode de mesure   | Fréquence            |
|---------------------|----------------------|
| Cavité ultra-stable | 384 286 335, 033 MHz |
| Peigne de fréquence | 384 286 335, 026 MHz |

## 4.2 Nouveau dispositif pour la condensation

Nous présentons dans cette section le nouveau dispositif que nous avons conçu afin d'obtenir une source d'atomes condensés. Celle-ci a été conçue et réalisée au cours des trois dernières années, et constitue une part importante du présent

travail de thèse.

### 4.2.1 Enceinte à vide

L'enceinte à vide conçue pour l'expérience est présentée en figure 4.14. Celle-ci

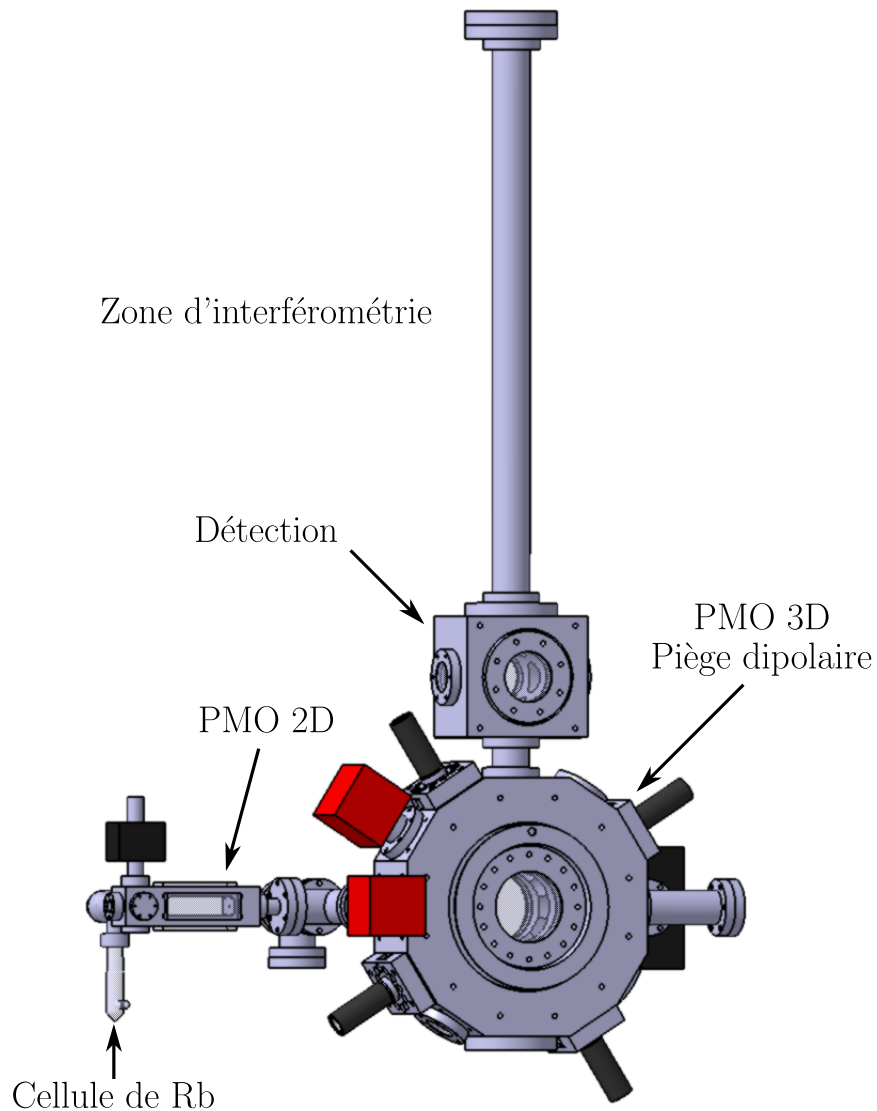


Fig. 4.14 *Enceinte à vide réalisée pour l'expérience.*

a été entièrement fabriquée en titane au laboratoire, afin de limiter au maximum l'effet des champs magnétiques parasites. Une fois fabriquées, et avant assemblage, les pièces ont été nettoyées et étuvées dans un four à 500 °C pendant une

semaine, afin de limiter la présence d'impuretés. L'enceinte se compose essentiellement de trois zones : la zone de chargement du piège, où les atomes sont piégés dans un piège magnéto-optique (PMO) à 2 dimensions, qui permet de charger la cellule de piégeage 3D et de refroidissement. La zone dédiée à l'interférométrie est quant à elle située au-dessus de la cellule de refroidissement et est constituée d'un tube en titane de 70 cm, en-dessous duquel est située une enceinte de détection.

L'enceinte du PMO 2D est connectée à la cellule du PMO 3D par l'intermédiaire d'une croix en titane. Sur celle-ci, une vanne nous a permis de raccorder les pompes primaire et secondaire, permettant de descendre jusqu'à une pression de l'ordre de  $10^{-7}$  mbar dans l'ensemble de l'enceinte. En face, une pompe hybride getter/ionique SAES NEXTorr 200 L/s permet d'assurer une pression de l'ordre de  $7 \times 10^{-9}$  mbar, permettant un premier étage de vide différentiel. Du côté opposé au PMO 2D, un té en titane est fixé à la cellule du PMO 3D, permettant le pompage de l'enceinte par une pompe ionique Agilent 200 L/s.

La zone destinée à l'interférométrie est constituée d'un tube en titane de 70 cm et de diamètre interne 38 mm, autour duquel un bobinage a été réalisé afin de pouvoir générer un champ de compensation à ce niveau de l'enceinte. Le choix de réaliser l'interféromètre au sein d'un tube est motivé par la mise en œuvre du schéma de gravimètre compact [Andia et al., 2013] à différentes positions, afin de réaliser des mesures gradiométriques. L'isolation magnétique de cette zone étant cruciale, la zone interférométrique est positionnée au sein d'un blindage magnétique en mu-métal. Ce tube est directement connecté à la cellule au sein de laquelle sera effectuée la détection des atomes par la technique de temps de vol. La figure 4.15 présente l'ensemble de l'enceinte à vide au moment de son assemblage.

Afin de minimiser l'influence des vibrations, l'ensemble de l'enceinte repose sur un marbre de dimensions  $100 \times 80$  cm<sup>2</sup>. Celui-ci est lui-même isolé du sol par des pieds anti-vibrations.

### Instabilité de l'argon

La première étape de l'expérience consistant à piéger et refroidir les atomes afin d'atteindre la condensation de Bose-Einstein, l'étape cruciale de la construction de la nouvelle enceinte à ultra-vide a été l'obtention d'un vide suffisant, de





Fig. 4.15 *Enceinte à vide assemblée.*

l'ordre de  $10^{-10}$  mbar. Une première étape de pompage avec une pompe primaire à palette nous a permis d'amorcer un vide primaire, nous permettant d'enchaîner sur une étape de pompage secondaire réalisé avec une pompe turbo. Au cours de celle-ci, l'ensemble de l'enceinte a été étuvé de nouveau à l'aide de cordons chauffants, pendant plusieurs jours. A l'issue de cette première étape de pompage, nous avons pu obtenir une pression de l'ordre de  $10^{-7}$  mbar. L'étape suivante a consisté à déclencher les pompes hybrides, ainsi que les pompes ioniques.

Au cours de cette étape du pompage, nous avons été confronté au phénomène de l'instabilité de l'argon. En effet, la fabrication des pièces en croix et en té du dispositif ont nécessité de réaliser des soudures titane sur titane. Celles-ci ont été réalisées sous atmosphère saturée en Argon. On peut ainsi penser que malgré de longues périodes d'étuvage des pièces, de l'argon ait encore été piégé au sein des soudures. Le phénomène de l'instabilité de l'argon est observé au bout d'un certain temps de pompage : l'argon est relargué des pompes ioniques, ce qui a pour effet d'induire une forte remontée de pression. Le processus de pompage est alors accéléré permettant de retrouver une pression inférieure. Ce cycle se répète à intervalles de temps réguliers, qui dépendent de la pression dans l'enceinte. La figure 4.16 présente l'évolution de la pression au cours du temps. On peut visualiser les pics de pression correspondant au relargage de l'argon par les pompes.

Afin de réduire la pression limite avant l'apparition de cette instabilité, nous avons ajouté une pompe ionique de 20 L/s, afin de permettre à l'Argon relargué d'être recapté immédiatement, évitant ainsi la forte remontée de pression caractéristique. Ceci nous a permis d'obtenir une pression stable de l'ordre de  $4.10^{-10}$  mbar au sein de la cellule du PMO 3D.

### 4.2.2 Sources lasers pour le piégeage et le refroidissement

La figure 4.17 présente les transitions du  $^{87}\text{Rb}$  utilisées pour le piégeage et le refroidissement. Le refroidissement est réalisé grâce à un faisceau désaccordé dans le rouge de la transition  $|F = 2\rangle$  vers  $|F' = 3\rangle$  de la raie  $D_2$  du  $^{87}\text{Rb}$ . Un faisceau repompeur accordé sur la transition  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  permet de ne pas perdre les atomes dépompés du niveau  $|F' = 2\rangle$  vers  $|F = 1\rangle$ .

Les faisceaux lasers utilisés pour le piégeage et le refroidissement des atomes sont émis par deux diodes lasers Thorlabs (L785P090) à 785 nm montées en ca-

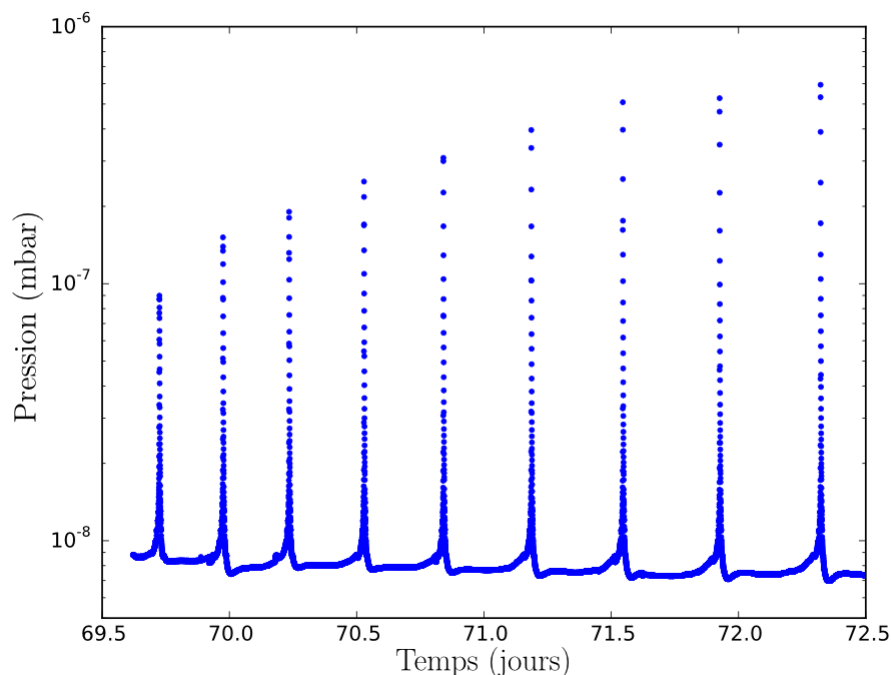


Fig. 4.16 Remontée périodique de la pression dans l'enceinte due à la présence d'argon piégé.

tivité étendue, dont le schéma est présenté dans la figure 4.18, selon un schéma développé par le SYRTE. La lumière issue des diodes lasers est collimatée par une lentille de focale 4,5 mm. Elle traverse ensuite un filtre interférentiel avant de passer par un œil de chat, constitué de deux lentilles de focales 18,5 mm, au centre desquelles la lumière est focalisée sur un miroir semi-réfléchissant monté sur une cale piézo-électrique. Le filtre interférentiel permet de sélectionner la longueur d'onde amplifiée par la cavité ainsi formée entre la face arrière de la diode et le coupleur de sortie, d'une longueur typique d'une quinzaine de centimètres. La longueur de la cavité peut être ajustée en faisant varier la tension aux bornes de la cale piézo-électrique. On obtient des puissances typiques, à 780 nm, de l'ordre de 35 à 40 mW pour des courants de l'ordre de 100 mA. En sortie de la cavité étendue, le faisceau traverse un anamorphoseur afin de rectifier l'astigmatisme des diodes lasers. Un isolateur optique est ajouté afin de réduire les retours parasites dans la cavité. Chacune de ces sources lasers est ensuite fibrée, permettant d'obtenir deux sources lasers de puissances de l'ordre de 15 à 20 mW en sortie de fibre.

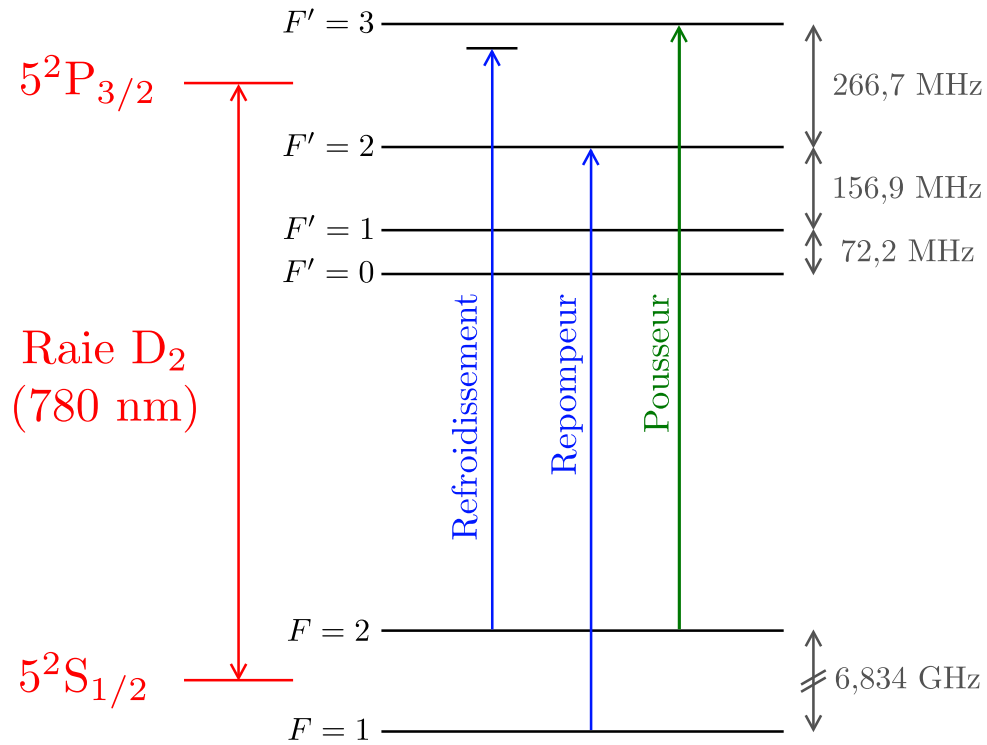


Fig. 4.17 Niveaux hyperfins du  $^{87}\text{Rb}$  utilisés dans l'expérience.

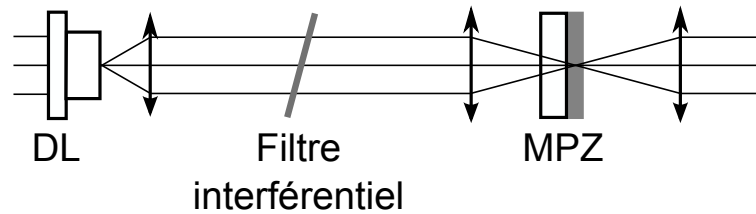


Fig. 4.18 Schéma optique des diodes lasers en cavité étendue permettant la génération des sources lasers des faisceaux piège et repompeur. Le coupleur de sortie monté sur sa cale piézo-électrique a été ici dénommé MPZ.

Ces deux faisceaux sont ensuite mélangés dans un système optique que l'on dénommera « carré de cubes », dont le schéma est présenté dans la figure 4.20. La lumière issue des deux sources lasers passe par une série de lames demi-onde et de cubes polariseurs, permettant de mélanger les deux faisceaux en polarisations croisées, afin de les amplifier d'une part, mais aussi afin de réaliser leur asservissement en fréquence.

Une fibre partant du « carré de cubes » permet d'amener les deux faisceaux afin qu'ils soient amplifiés. Le banc d'amplification est présenté dans la figure 4.22. Nous utilisons un amplificateur semi-conducteur de type MOPA (Mas-

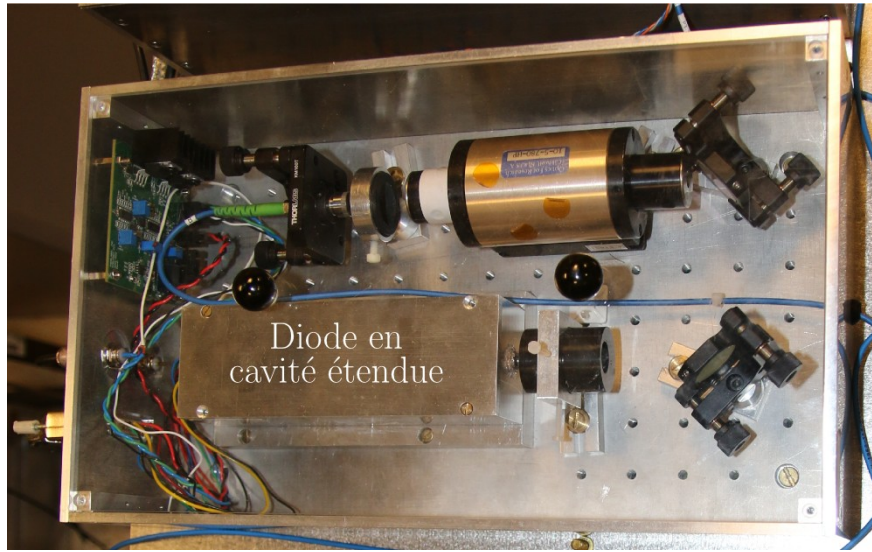


Fig. 4.19 Source laser réalisée grâce à une diode laser en cavité étendue.

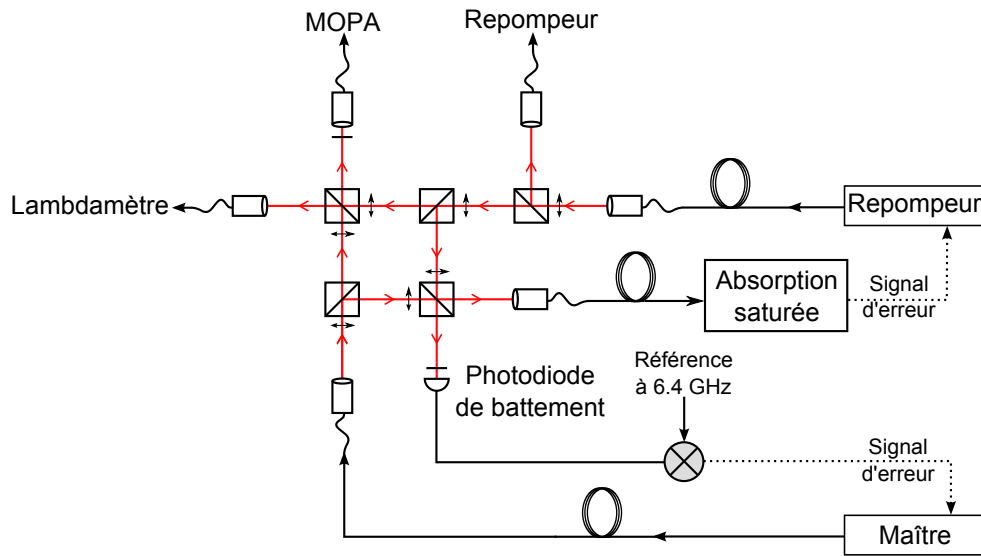


Fig. 4.20 Schéma optique du « carré de cubes ». Les faisceaux maître et repompeur sont mélangés, afin d'être amplifiés, et afin d'asservir la fréquence du laser maître.

ter Oscillator Power Amplifier). Deux isolateurs optiques ont été placés à son entrée et sa sortie afin de le protéger de tout retour optique. Nous avons des puissances en entrée du MOPA de l'ordre de 10 mW et 5 mW, respectivement pour le maître et le repompeur. En sortie du MOPA, nous obtenons des puissances de 900 mW et 400 mW respectivement pour les faisceaux maître et repompeur,

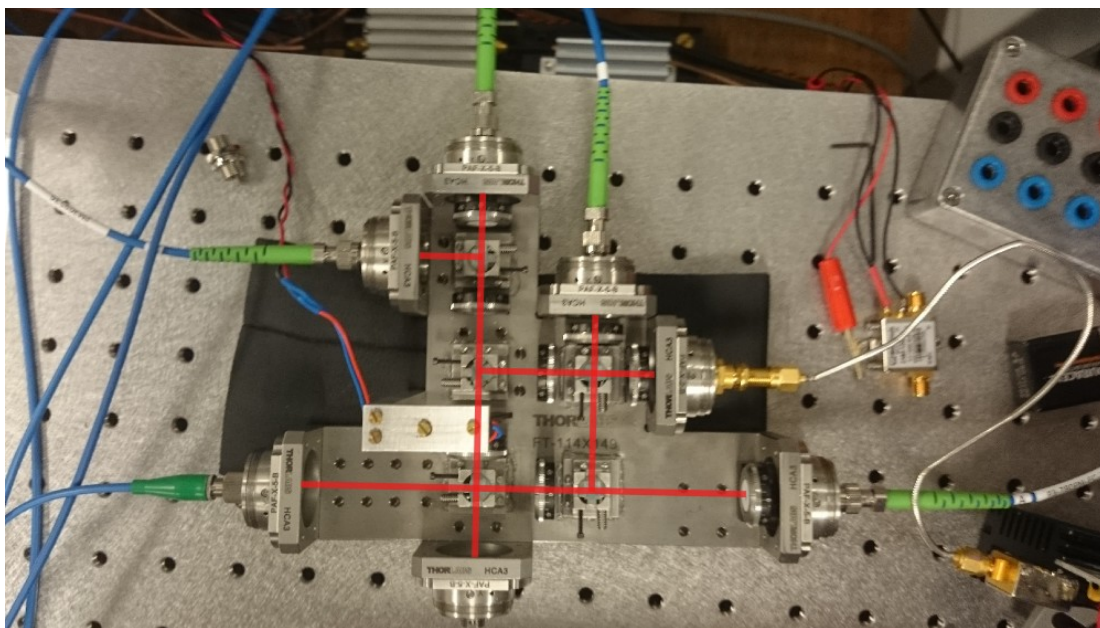


Fig. 4.21 « Carré de cubes ».

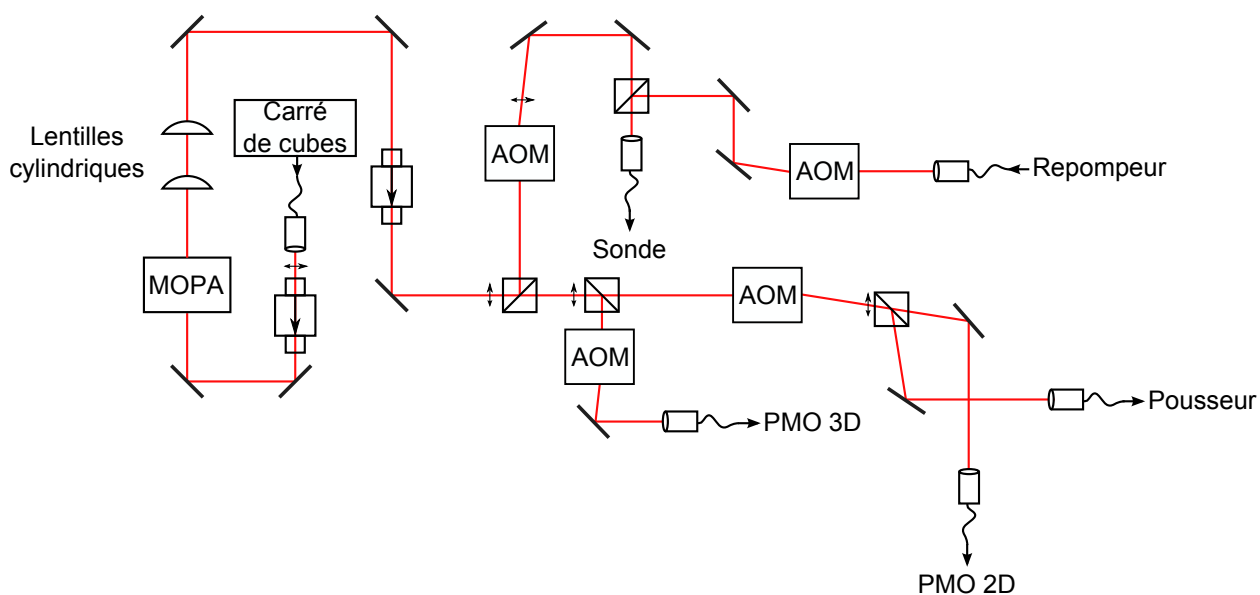


Fig. 4.22 Schéma optique du banc d'amplification des faisceaux de piège et de refroidissement.

pour un courant de pompe de 1,9 A. La divergence du faisceau est corrigée par deux lentilles cylindriques placées en sortie du MOPA. Le faisceau obtenu est alors divisé en quatre, servant à créer les faisceaux pousseur et piège du PMO 2D, les faisceaux piège du PMO 3D, et le faisceau sonde permettant l'imagerie



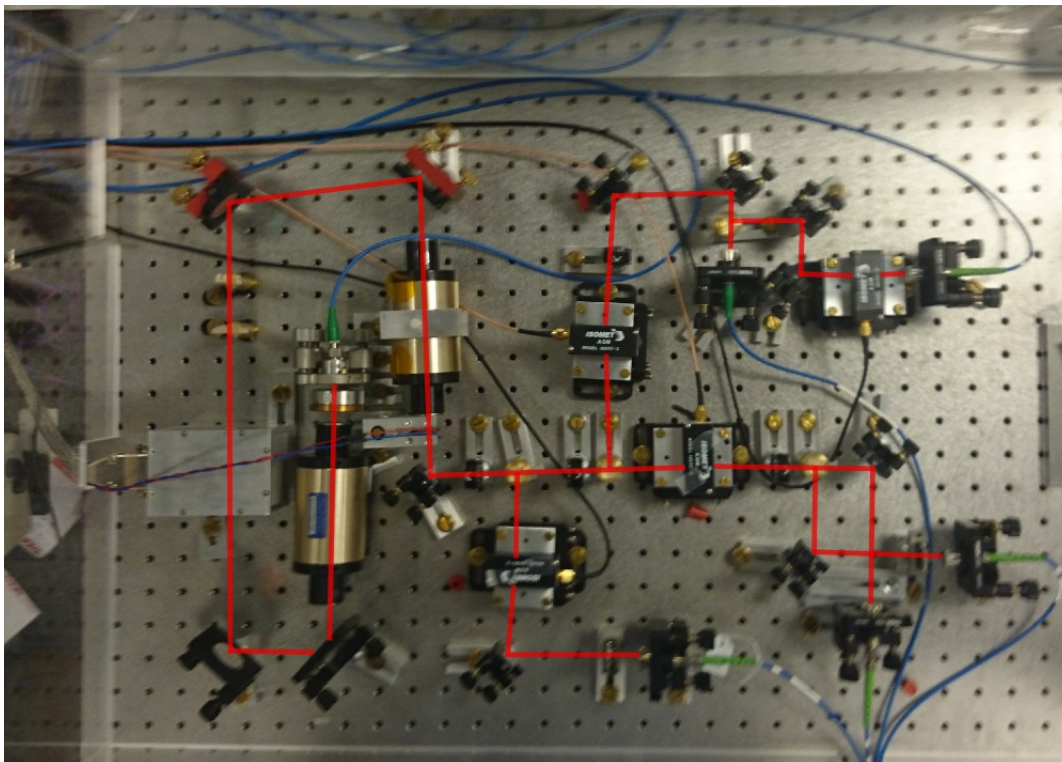


Fig. 4.23 *Banc d'amplification des sources lasers.*

du nuage d'atomes. Nous utilisons des modulateurs acousto-optiques (AOM) de 80 MHz afin de pouvoir couper le piégeage au cours de la séquence temporelle de l'expérience.

### Contrôle des fréquences des sources lasers de refroidissement

**Asservissement du faisceau repompeur** Le faisceau repompeur est asservi sur la raie de croisement  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 1\rangle$  et  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  de la raie  $D_2$  du rubidium 87, par la méthode de l'absorption saturée. Un faisceau pompe sature la transition dans une cellule de rubidium à température ambiante. Un faisceau sonde issu du faisceau pompe est envoyé dans la cellule dans le sens opposé. A la fréquence de la transition, la pompe sature totalement la transition, et la sonde est transmise. Le signal d'absorption de la sonde est démodulé par détection synchrone, et permet de générer les corrections à apporter au courant injecté dans la diode et à la tension de la cale piézo-électrique. Les modulateurs acousto-optiques dans le banc d'amplification augmentent par la suite la fréquence du faisceau de 78 MHz, permettant de se placer à résonance de la

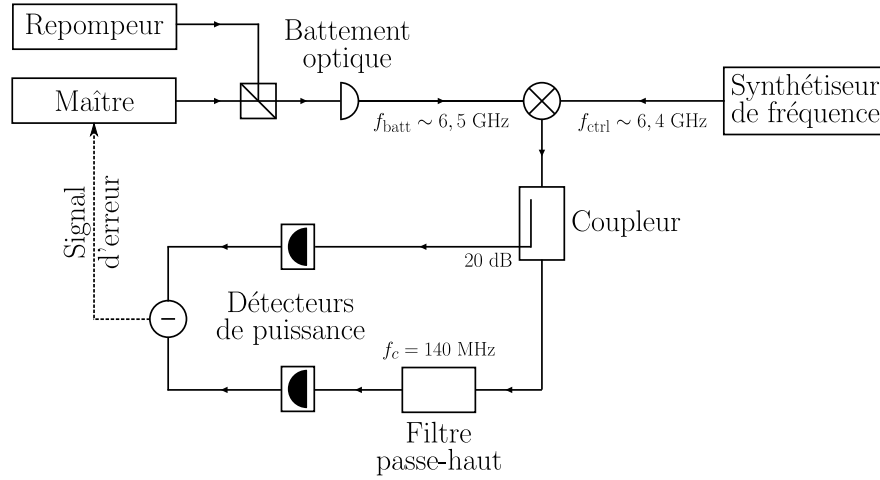


Fig. 4.24 Système de contrôle du laser maître.

transition  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ .

**Contrôle de la fréquence du laser maître** La fréquence du laser maître doit pouvoir être balayée sur environ 100 MHz autour de la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ . La fréquence du laser maître peut alors être fixée par rapport à la fréquence du repompeur. En effet, une fois cette dernière fixée, la fréquence du maître est donnée par (voir figure 4.17) :

$$\nu_{\text{maître}} = \nu_{\text{repompeur}} - \frac{\omega_{\text{SHF}}}{2\pi} + \frac{\omega_{F'=3} - \omega_{F'=2}}{2\pi} - \frac{\delta}{2\pi}, \quad (4.2.1)$$

où  $\omega_{\text{SHF}}/(2\pi)$  est la fréquence entre les niveaux  $|F = 1\rangle$  et  $|F = 2\rangle$  et  $\delta$  le désaccord à la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ . La fréquence du battement entre les lasers maître et repompeur correspond donc à :

$$\nu_{\text{battement}} = \left| 6,57 \text{ GHz} - \frac{\delta}{2\pi} \right|, \quad (4.2.2)$$

où l'on veut que le désaccord  $\delta/(2\pi)$  puisse être balayé sur une plage de 200 MHz autour de 0.

Le système d'asservissement consiste donc à effectuer un battement optique entre les faisceaux maître et repompeur. La fréquence de ce signal détecté par une photodiode est alors comparée à une référence de fréquence stable à  $\sim 6,4$  GHz. Le signal résultant, qui correspond alors à un battement à une fréquence proche



de 100 MHz, est ensuite séparé en deux bras. Le premier possède une atténuation fixe de 20 dB, le second, quant à lui, est muni d'un filtre passe-haut, qui atténue de 20 dB un signal de fréquence de l'ordre de 100 MHz. Les tensions de sortie des deux bras sont alors comparées permettant de générer un signal d'erreur, qui est traité par un système proportionnel-intégrateur, avant d'être utilisé pour l'asservissement de la diode.

Le contrôle du désaccord  $\delta$  appliqué est lui réalisé grâce à un synthétiseur de fréquence qui a été réalisé dans l'équipe. Son principe de fonctionnement repose sur le pilotage d'une carte Analog Devices ADF4108 (boucle à phase asservie, PLL) à l'aide d'une carte Arduino. La carte ADF4108 permet, à partir d'une fréquence de référence,  $f_{\text{ref}}$ , de générer une fréquence de sortie, de l'ordre de 6,4 GHz, telle que :

$$f_{\text{out}} = N \cdot \frac{f_{\text{ref}}}{R}. \quad (4.2.3)$$

La fréquence de référence,  $f_{\text{ref}}$ , à 10 MHz, est obtenue à partir d'un signal à 100 MHz provenant de l'oscillateur local des horloges atomiques du SYRTE, tandis que la valeur de  $R$  est fixée à 10, de telle sorte que l'on peut faire varier la fréquence générée par la carte ADF4108,  $f_{\text{out}}$ , par pas de 1 MHz. Il est ainsi possible de faire varier le désaccord du laser maître, en changeant la fréquence générée par ce synthétiseur.

### 4.2.3 Piège magnéto-optique 2D

Le PMO 2D est réalisé dans une pièce en titane, dont les faces latérales sont fermées par quatre hublots rectangulaires de dimensions  $100 \times 30 \text{ mm}^2$ . Un hublot circulaire de 16 mm de diamètre permet un accès optique selon l'axe long de l'enceinte. Un trou, de longueur 17,5 mm et de diamètre 1,5 mm, permet la sortie du jet d'atomes vers la cellule de refroidissement. L'enceinte du PMO 2D contenant en permanence une pression de vapeur saturante de rubidium, ce trou permet de plus de maintenir une différence de pression avec les autres compartiments du dispositif. Le pompage est assuré par une pompe ionique Agilent VacIon 2 L/s. Une modélisation 3D de l'enceinte à vide est présentée en figure 4.25.

La source d'atomes de rubidium est une cellule en verre, dont le queue-sot contient du Rb solide. La pression de vapeur saturante suffit à obtenir une vapeur de Rb dans l'enceinte. Une pression de l'ordre de  $3 \times 10^{-8} \text{ mbar}$  a été évaluée

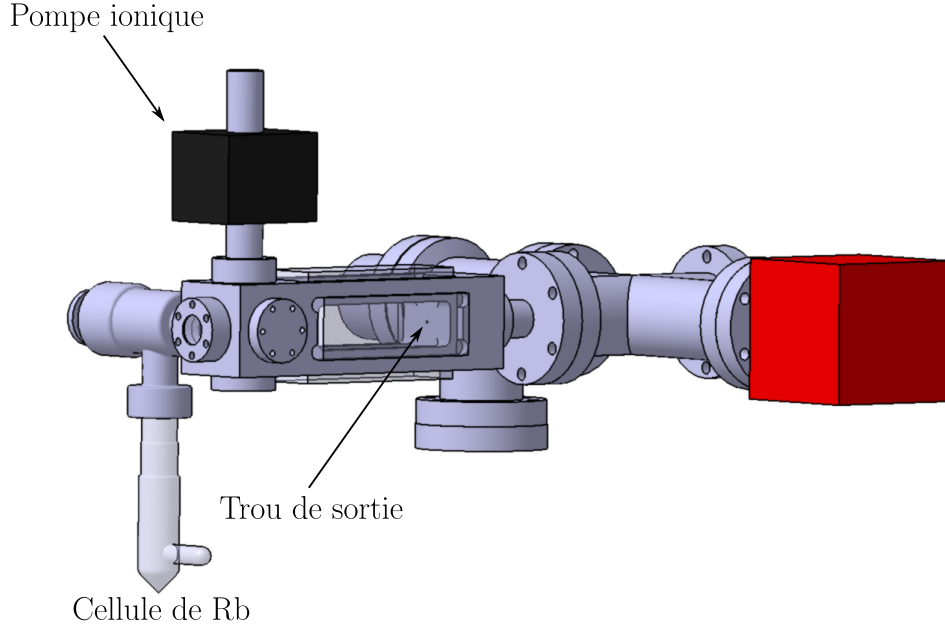


Fig. 4.25 Modélisation 3D de l'enceinte à vide servant à la réalisation du PMO 2D. Une pompe ionique Agilent 2 L/s permet d'assurer une pression de l'ordre de  $5 \times 10^{-8}$  mbar. Une pompe hybride getter/ionique SAES 5 L/s permet quant à elle de créer un premier étage de vide différentiel, en assurant une pression de l'ordre de  $10^{-9}$  mbar après le trou de sortie du jet d'atomes.

par mesure de l'absorption d'un faisceau accordé sur la transition de la raie  $D_2$  du rubidium.

Le gradient de champ magnétique du piège est produit grâce à deux paires de bobines rectangulaires en configuration anti-Helmoltz. Deux autres paires de bobines en configuration Helmholtz cette fois permettent de générer un champ d'offset, nous permettant de déplacer la position du centre du piège. Afin de réaliser un dispositif compact, les bobines servant à générer l'offset et le gradient ont été réalisées sur les mêmes supports, qui sont fixés autour des hublots rectangulaires de l'enceinte. Les bobines réalisées sont de dimensions  $100 \times 35 \text{ mm}^2$ , et constituées de 80 tours, pour celles générant le gradient, et de 20 tours pour celles d'offset. On peut ainsi générer au centre de l'enceinte un gradient de l'ordre de  $3,8 \text{ G/cm/A}$ , tout en déplaçant le centre du piège sur des distances de l'ordre du centimètre. Les supports des bobines sont fixés sur des tiges rectangulaires créant une armature autour de l'enceinte. On n'a ainsi pas de contact entre les parois de l'enceinte et les bobines.

Un faisceau issu de l'amplification par le MOPA des maître et repompeur

est amené à la zone du PMO 2D par fibre optique. Ce faisceau laser est formé par les deux faisceaux en polarisations croisées. En sortie de la fibre, le faisceau est collimaté à un diamètre de l'ordre de 25 mm. Ce faisceau est ensuite divisé en deux, afin de permettre le piégeage dans chacune des directions. Chacun de ces deux faisceaux piège est à nouveau séparé en deux grâce à une lame demi-onde et un cube séparateur de polarisation. Le faisceau réfléchi par le cube est directement envoyé vers l'enceinte, tandis que celui transmis est réfléchi vers l'enceinte par un miroir. Avant d'atteindre l'enceinte, chaque faisceau traverse une lame quart d'onde, lui permettant d'être polarisé circulairement. Après avoir traversé l'enceinte, chaque faisceau repasse à travers une lame  $\lambda/4$ , avant d'être rétro-réfléchi par un miroir. La lumière suit alors le chemin inverse permettant d'obtenir deux faisceaux contre-propageants de polarisations circulaires opposées. Le faisceau pousseur est lui aussi amené depuis le banc d'amplification par fibre optique, dont la sortie est collimatée grâce à un collimateur Thorlabs F220APC-780, permettant d'obtenir un diamètre typique de faisceau de l'ordre de 2 mm. Ce schéma optique nous permet de créer deux zones de piégeage successives le long de l'axe du piège. Une coupe le long de cet axe, présentant le schéma optique réalisé est donnée en figure 4.26.

La figure 4.27 présente le PMO 2D assemblé. L'enceinte à vide ainsi que le système optique ont été conçus de manière à rendre l'ensemble relativement compact. La partie PMO 2D de l'expérience occupe ainsi une surface de  $20 \times 40 \text{ cm}^2$ .

#### 4.2.4 Piège magnéto-optique 3D

L'enceinte destinée à refroidir les atomes à 3D est constituée d'une pièce de titane d'épaisseur 113 mm dans laquelle ont été taillées douze faces, dont quatre grandes faces, qui permettent de connecter l'enceinte avec les autres compartiments de l'expérience. Huit petites faces offrent des accès optiques pour les faisceaux pièges ainsi que pour l'imagerie du nuage d'atomes. Une visualisation du compartiment PMO 3D est représentée en figure 4.28. Le pompage est assuré par une pompe getter/ionique SAES 200 L/s permettant d'obtenir une pression de l'ordre de  $10^{-10}$  mbar dans cette partie du dispositif. Deux bobines, en configuration anti-Helmoltz, de rayon 9 cm sont placées contre les deux grandes faces de l'enceinte afin de générer un gradient de champ magnétique de l'ordre de 3

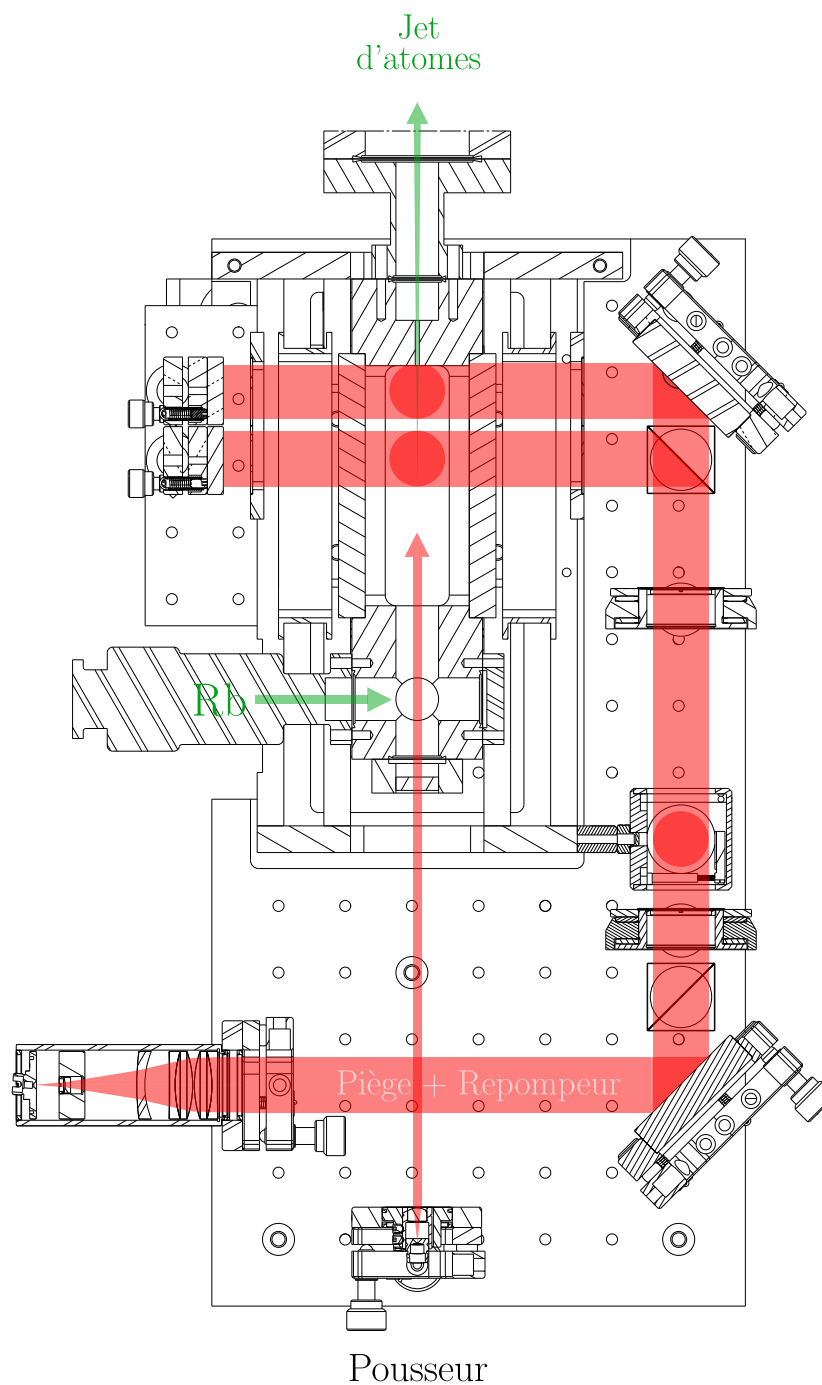


Fig. 4.26 Coupe du PMO 2D.

G/cm/A au centre du piège. Trois paires de bobines rectangulaires de dimensions  $75 \times 60 \times 53 \text{ cm}^3$ , montées en configuration de Helmholtz, permettent de générer un champ de compensation de l'ordre de quelques Gauss dans les trois directions

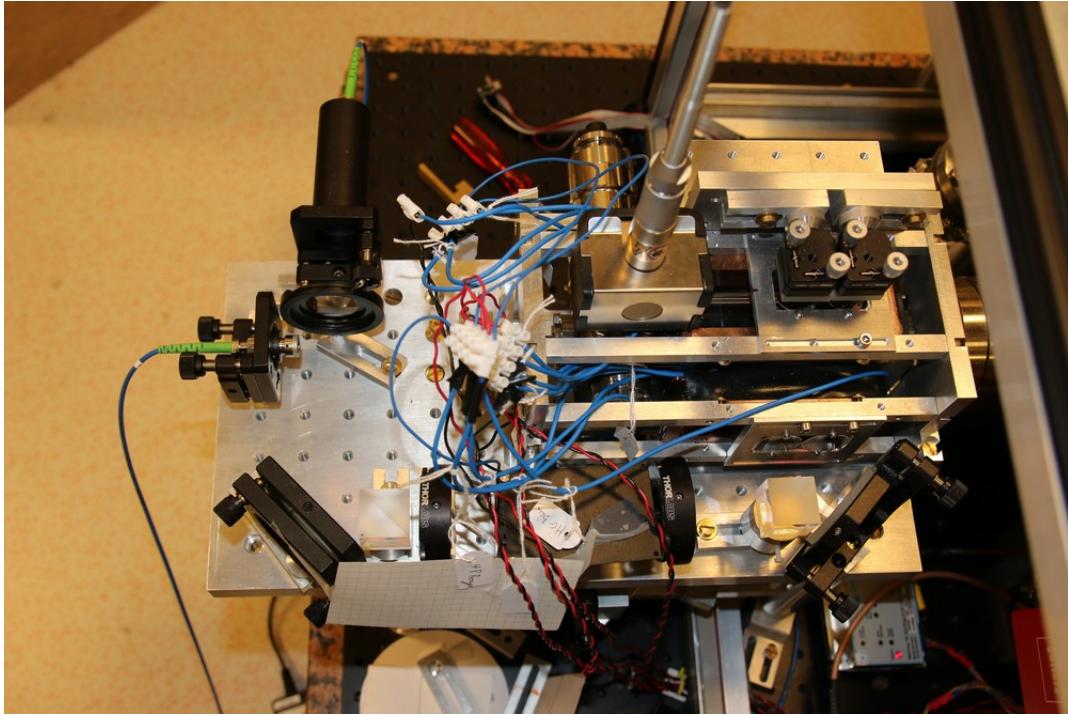


Fig. 4.27 *PMO 2D au cours de son assemblage.*

de l'espace. Nous pouvons ainsi compenser les champs magnétiques parasites.

Un séparateur six faisceaux permet de générer les faisceaux du piège à partir d'un faisceau prélevé après amplification par le MOPA. Ceux-ci sont amenés par fibre à l'enceinte. Ils sont chacun collimatés à un diamètre de 25 mm et polarisés circulairement avant d'être injectés dans l'enceinte. La collimation est réalisée à l'aide d'un système de quatre lentilles, dont le schéma est présenté en figure 4.30.

Le chargement du piège à 3 dimensions par le PMO 2D est réalisé en faisant varier le désaccord et en optimisant le flux d'atomes. La figure 4.31 présente le flux d'atomes en fonction du désaccord, on obtient un flux de l'ordre de  $6,5 \times 10^8$  atomes/s pour un désaccord de l'ordre de 10 MHz. Le désaccord par rapport à la transition est varié en changeant la fréquence générée par la boucle à phase asservie permettant le contrôle du laser maître. Le flux d'atomes est quant à lui déterminé grâce à une photodiode placée devant un des hublots de l'enceinte, permettant de mesurer la fluorescence provenant du piège.

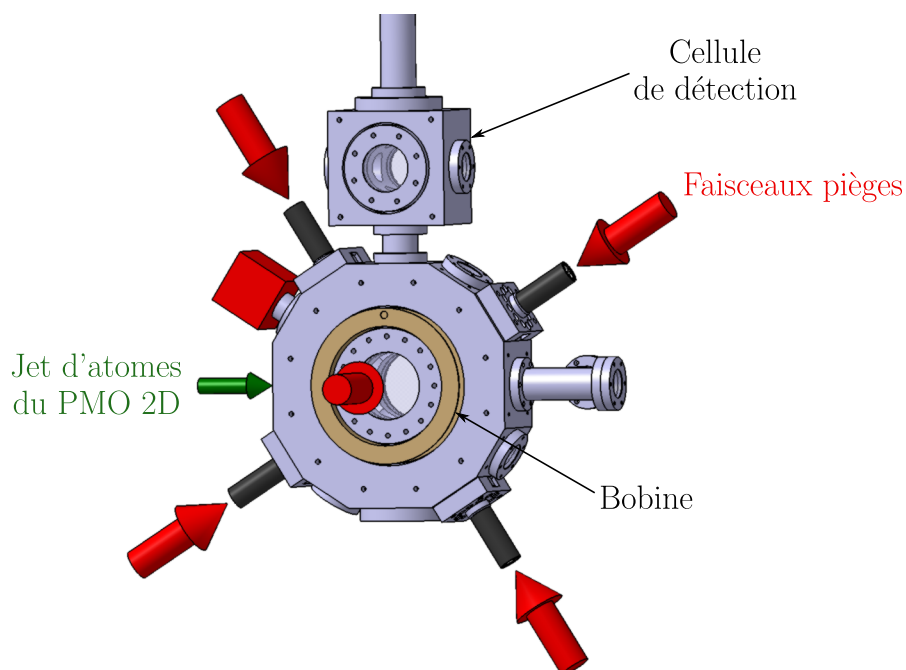


Fig. 4.28 Vue 3D du compartiment de l'enceinte à vide du PMO 3D. Un gradient de champ magnétique de l'ordre de  $3 \text{ G/cm/A}$  est créé au centre de l'enceinte grâce à deux bobines montées en configuration anti-helmoltz. Les six faisceaux pièges sont collimatés directement en sortie de fibre juste avant d'être envoyés vers l'enceinte.

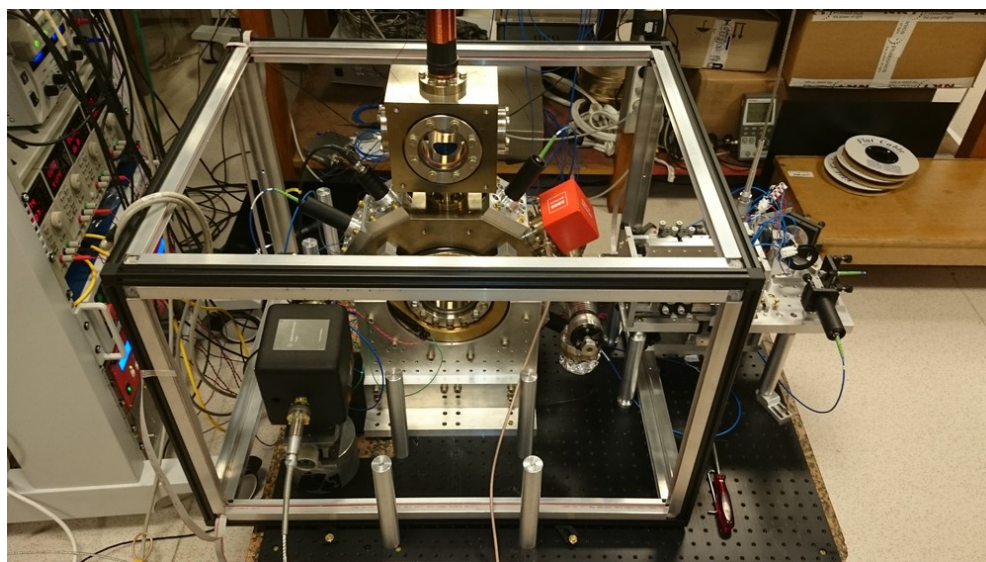


Fig. 4.29 Enceinte du PMO 3D entourée par les trois paires de bobines de compensation.

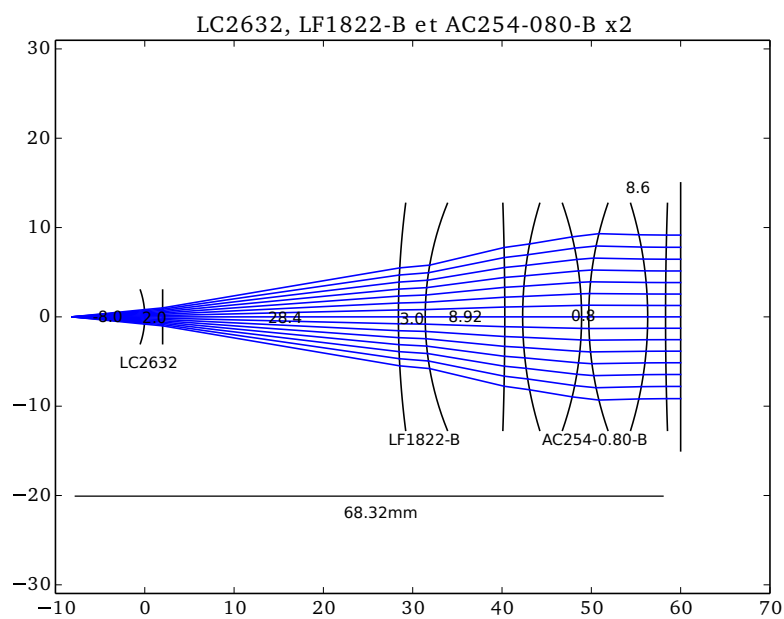


Fig. 4.30 Schéma du système de quatre lentilles permettant la collimation des faisceaux du PMO 3D. Celui-ci est constitué d'une lentille divergente de focale -12 mm (Thorlabs LC2632-B), un ménisque divergent de focale -100 mm (Thorlabs LF1822-B) et de deux doublets achromatiques de focale 80 mm (Thorlabs AC254-080-B).

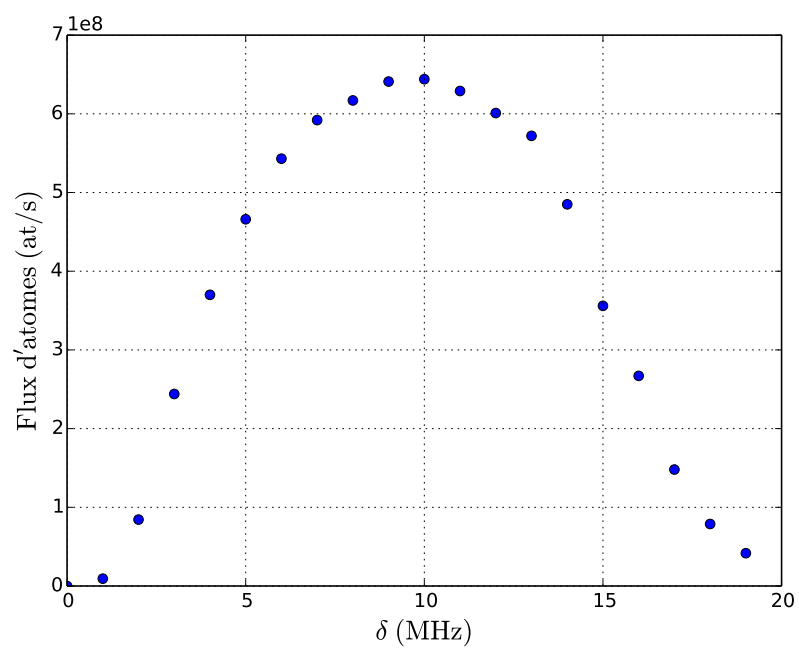


Fig. 4.31 Optimisation du taux de chargement du PMO 3D en jouant sur le désaccord à la transition. Nous obtenons un flux d'atomes de l'ordre de  $6,5 \times 10^8$  atomes/s.



### Imagerie par absorption

Afin de pouvoir caractériser le nuage d'atomes piégés au sein de notre dispositif, nous avons besoin d'avoir accès aux paramètres physiques qui le caractérisent tels que sa taille, sa température ainsi que le nombre d'atomes le constituant. Pour cela, nous imageons le nuage grâce à un faisceau sonde accordé sur la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$  de la raie D<sub>2</sub>. Ce faisceau est prélevé à partir du banc d'amplification, nous récupérons une puissance typique de l'ordre de 30  $\mu\text{W}$ . Celui-ci est envoyé sur le nuage d'atomes, et son image est enregistrée grâce à une caméra CCD. Le principe de cette technique d'imagerie consiste à comparer l'ombre projetée par le nuage avec une image témoin où les atomes ne sont pas présents.

La loi de Beer-Lambert nous donne l'intensité lumineuse transmise par le nuage :

$$I(x,y) = I_0(x,y)e^{-\sigma \int n(x,y,z)dz}, \quad (4.2.4)$$

où  $\sigma$  est la section efficace d'absorption et  $n(x,y,z)$  la densité du nuage. L'efficacité d'absorption est en effet donnée par le rapport de  $\sigma$  et de la densité du nuage intégrée sur la direction de propagation du faisceau. La section efficace dépend du désaccord à la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ ,  $\delta_s$ , et de l'intensité du faisceau  $I_0$ , selon l'expression :

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + \frac{2I_0}{I_{\text{sat}}} + \left(\frac{2\delta_s}{\Gamma}\right)^2}, \quad (4.2.5)$$

avec  $\Gamma$  la largeur naturelle de la transition, et avec  $\sigma_0 = 3\lambda^2/(2\pi)$ . A désaccord nul et faible saturation ( $I_0 \ll I_{\text{sat}}$ ), on a  $\sigma = \sigma_0$ . L'épaisseur optique,  $EO(x,y)$ , peut donc être déterminée par :

$$EO(x,y) = \sigma \int n(x,y)dz = -\ln \left( \frac{I(x,y)}{I_0(x,y)} \right), \quad (4.2.6)$$

où  $I_0$  sera l'intensité de l'image témoin et  $I$  l'intensité mesurée quand le nuage d'atomes est présent. La figure 4.32 présente une image du nuage réalisée par cette méthode.

On peut de plus en déduire le nombre d'atomes constituant le nuage en inté-

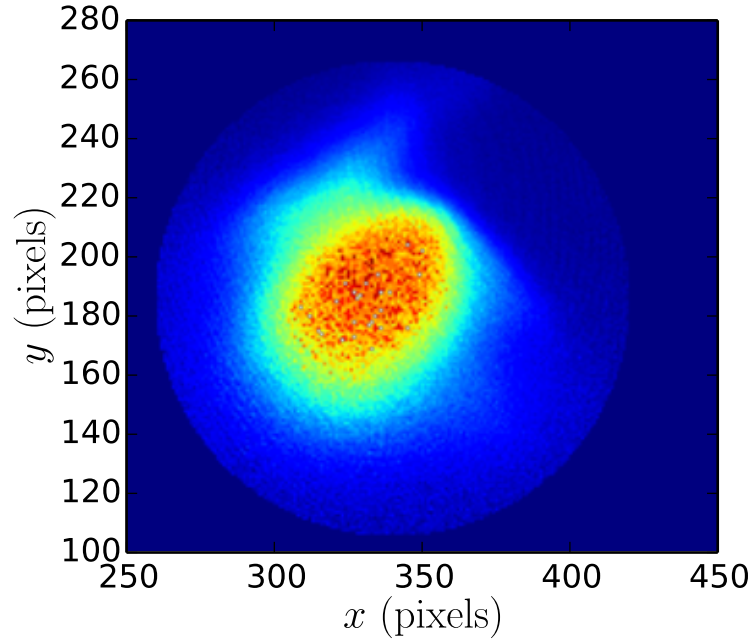


Fig. 4.32 Image du nuage réalisée par absorption. L'étalonnage de la caméra CCD nous donne  $53\text{ }\mu\text{m}$  par pixel.

grant l'épaisseur optique dans le plan de l'image :

$$N = \int \int \int n(x,y,z) dx dy dz = \frac{1}{\sigma} \int \int EO(x,y) dx dy. \quad (4.2.7)$$

Nous trouvons des valeurs typiques de l'ordre de  $5 \times 10^8$  atomes, pour des durées de chargement du PMO 3D de 800 ms. En supposant que le nuage est de forme gaussienne, on peut de plus ajuster l'image obtenue par une fonction de la forme :

$$n(x,y,z) = \frac{N}{(2\pi)^{3/2} L^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2L^2}}, \quad (4.2.8)$$

ce qui nous permet de déterminer la largeur du nuage. L'étalonnage de la caméra donnant  $53\text{ }\mu\text{m}/\text{pxl}$ , on trouve des tailles de l'ordre de  $1,6\text{ mm}$ .

### Caractérisation du nuage d'atomes froids

Nous pouvons caractériser le nuage après la séquence de refroidissement en imageant celui-ci après différents temps de vol. L'évolution de la largeur du nuage nous donne ainsi accès à sa température. En effet, la largeur  $L(t)$  du nuage est

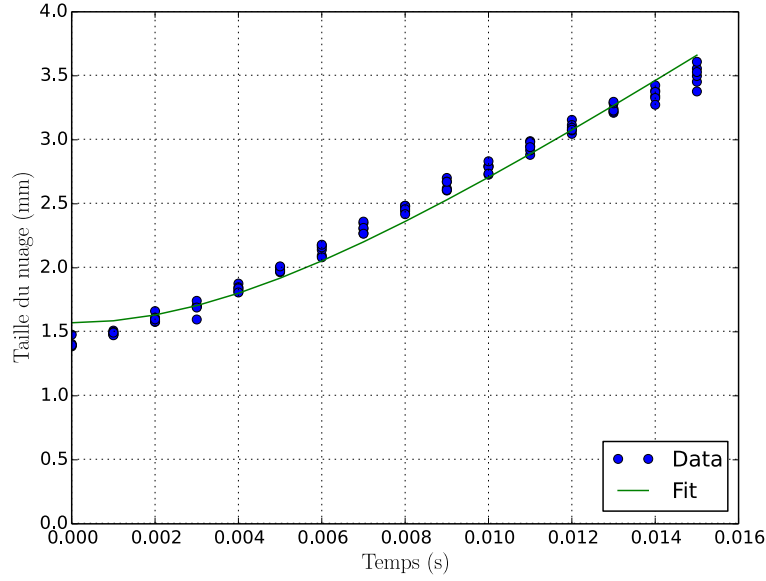


Fig. 4.33 Evolution de la largeur du nuage lorsque l'on coupe le PMO 3D. On trouve une vitesse d'expansion de l'ordre de 220 mm/s, correspondant à une température de l'ordre de 500  $\mu$ K.

donnée par son expansion balistique :

$$L(t) = \sqrt{L_0^2 + \delta v^2 t^2}, \quad (4.2.9)$$

où  $L_0$  est la taille du nuage au temps  $t = 0$ , et  $\delta v$  sa dispersion en vitesse. De cette dernière, on peut déterminer la température dans la direction d'expansion par la relation :

$$T = \frac{m \delta v^2}{k_B}, \quad (4.2.10)$$

avec  $k_B$  la constante de Boltzmann. La figure 4.33 présente l'évolution de la largeur du nuage en fonction du temps entre l'arrêt du piège et le début de l'imagerie par absorption. Ici, on n'a appliqué aucune phase de mélasse, le nuage est à une température d'environ 500  $\mu$ K.

### 4.3 Piège dipolaire et évaporation

Nous présentons dans cette section le piège dipolaire servant au refroidissement évaporatif des atomes. Celui-ci est réalisé à partir d'un laser fibré de marque IPG à 1064 nm, pouvant fournir une puissance de 50 W. Le faisceau émis

par celui-ci est ensuite séparé en deux faisceaux afin de générer les deux bras du piège. Le diamètre de chacun de ces faisceaux est alors réduit à peu près de moitié par un système de deux lentilles. Chaque faisceau traverse alors un modulateur acousto-optique haute puissance à 80 MHz, et les ordres 1 et -1 de diffraction sont récupérés respectivement, de façon à obtenir une différence de fréquence de 160 MHz entre les deux faisceaux. Enfin chacun des deux bras est focalisé au centre de l'enceinte par des lentilles de focales 200 mm et 150 mm. A la sortie de l'enceinte, les deux faisceaux sont bloqués. Des cols de 96  $\mu\text{m}$  pour les deux bras du piège sont ainsi obtenus au centre de l'enceinte. Ceci est présenté dans la figure 4.34. Les deux faisceaux possèdent une puissance maximale d'à peu près 20 W. Avec ces paramètres, on trouve une profondeur de piège de l'ordre de 440  $\mu\text{K}$ . Les deux faisceaux se croisent pour former un angle de l'ordre de  $70^\circ$ .

### 4.3.1 Chargement du piège

Une fois la phase de piégeage des atomes par le PMO 3D réalisée, nous appliquons une séquence de compression de celui-ci (CMOT). En effet, le nuage d'atomes au sein du piège a tendance à s'étendre. Pendant cette phase, nous augmentons le désaccord et nous augmentons le gradient de champ magnétique, de façon à confiner les atomes de façon plus importante. L'objectif est alors d'avoir un puits de potentiel le plus étroit possible afin de faciliter le transfert des atomes dans le piège dipolaire. Cette phase de compression dure à peu près 30 ms.

Les premiers essais de chargement du piège dipolaire ont été réalisés en n'utilisant qu'un seul des deux faisceaux, et avec une puissance de 16 W. La figure 4.35 présente une image par absorption du nuage d'atomes ainsi obtenu. La température au sein du piège est obtenue en faisant varier le temps de vol, qui est présentée en figure 4.36. On trouve une température de l'ordre de 38  $\mu\text{K}$ . Le nombre d'atomes piégés est de plus estimé à environ  $4 \times 10^5$ .

La figure 4.37 présente l'une des premières images des atomes piégés en utilisant les deux bras du piège. Celle-ci a été obtenue en utilisant la séquence temporelle de refroidissement préliminaire présentée en figure 4.38. On obtient ainsi de l'ordre de  $2 \times 10^5$  atomes, pour un nuage d'à peu près 150  $\mu\text{m}$  de diamètre.

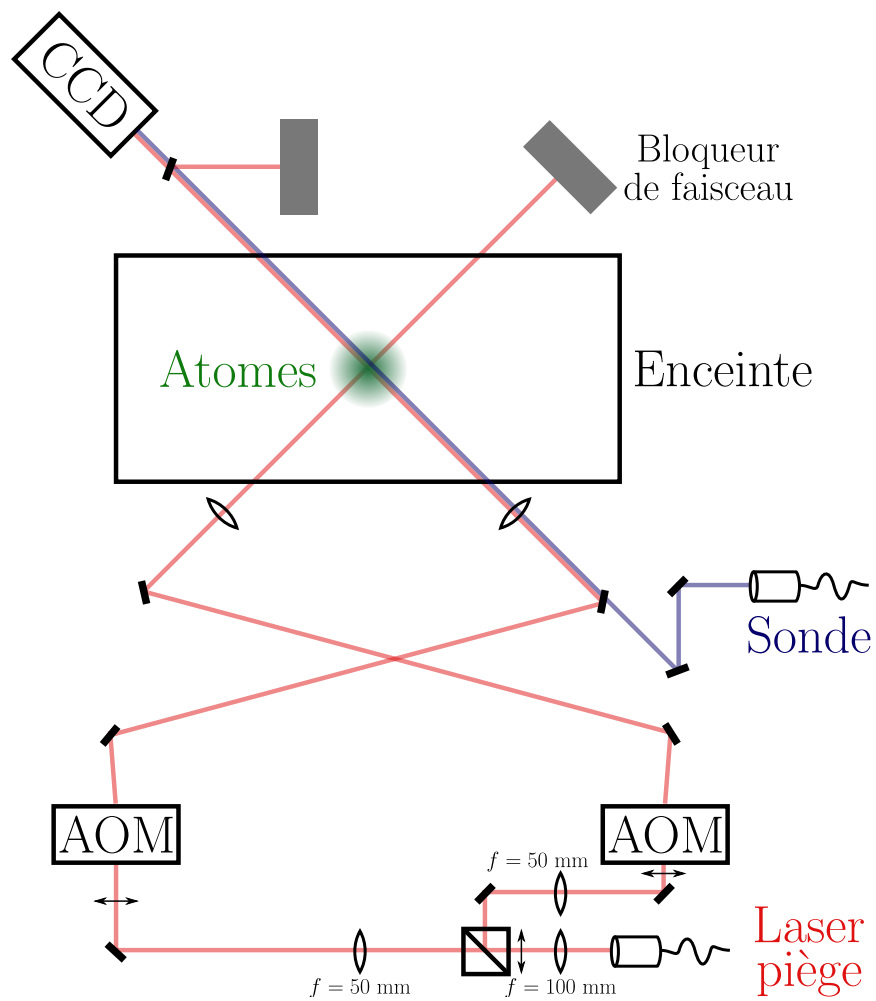


Fig. 4.34 Schéma optique du banc du piège dipolaire. Les faisceaux correspondant à l'ordre 0 de diffraction par les modulateurs acousto-optiques ne sont pas représentés ici, mais sont en pratique interrompus par des bloqueurs de faisceau.

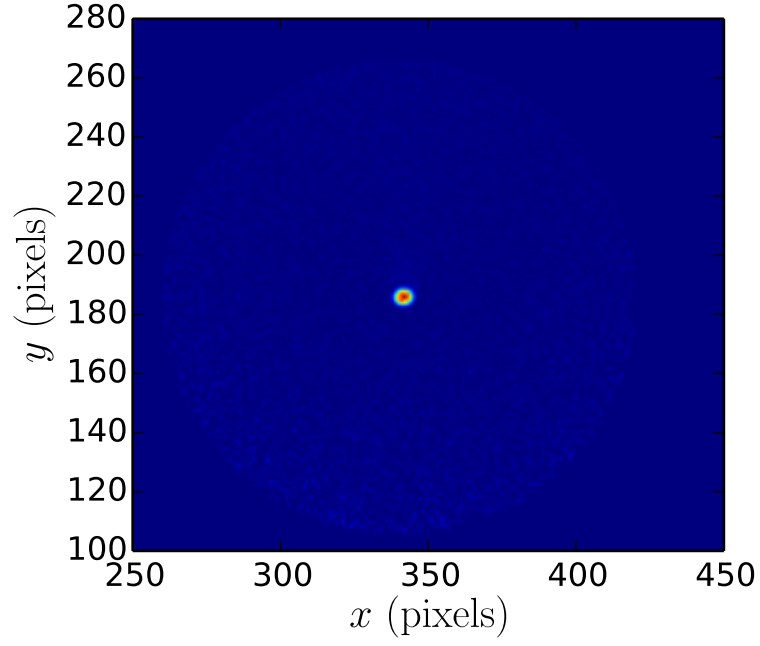


Fig. 4.35 Image par absorption du nuage d'atomes piégés dans un des deux bras du piège dipolaire.

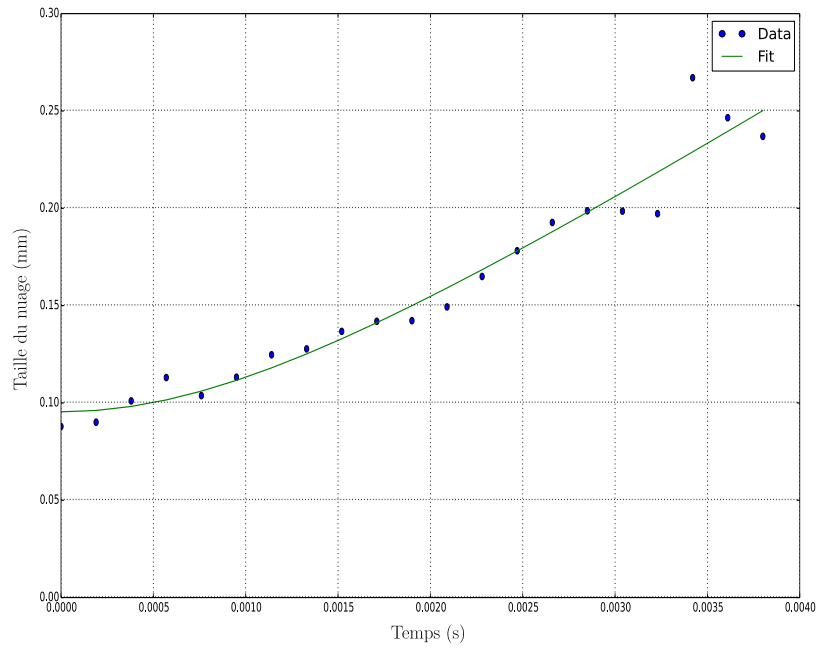


Fig. 4.36 Mesure de la température du nuage par temps de vol. La courbe en trait plein correspond à un ajustement numérique de l'expansion balistique. On obtient une largeur du nuage  $L_0$  de l'ordre de  $95\,\mu\text{m}$  et une vitesse  $v$  de l'ordre de  $60,8\,\text{mm s}^{-1}$ , correspondant à une température de  $38\,\mu\text{K}$ .

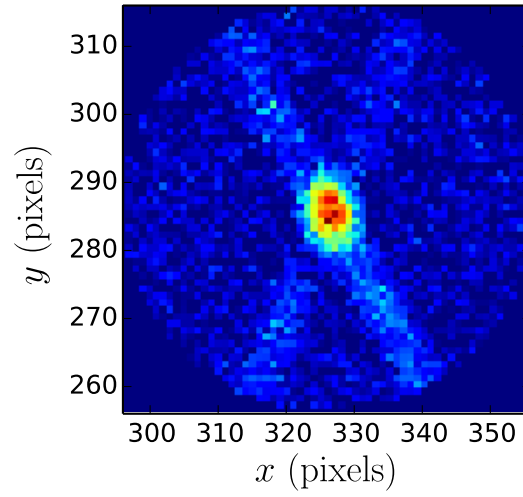


Fig. 4.37 Image par absorption du nuage d'atomes piégés par les deux bras du piège dipolaire. L'étalonnage de la caméra nous donne  $30,1 \mu\text{m}/\text{pxl}$ .

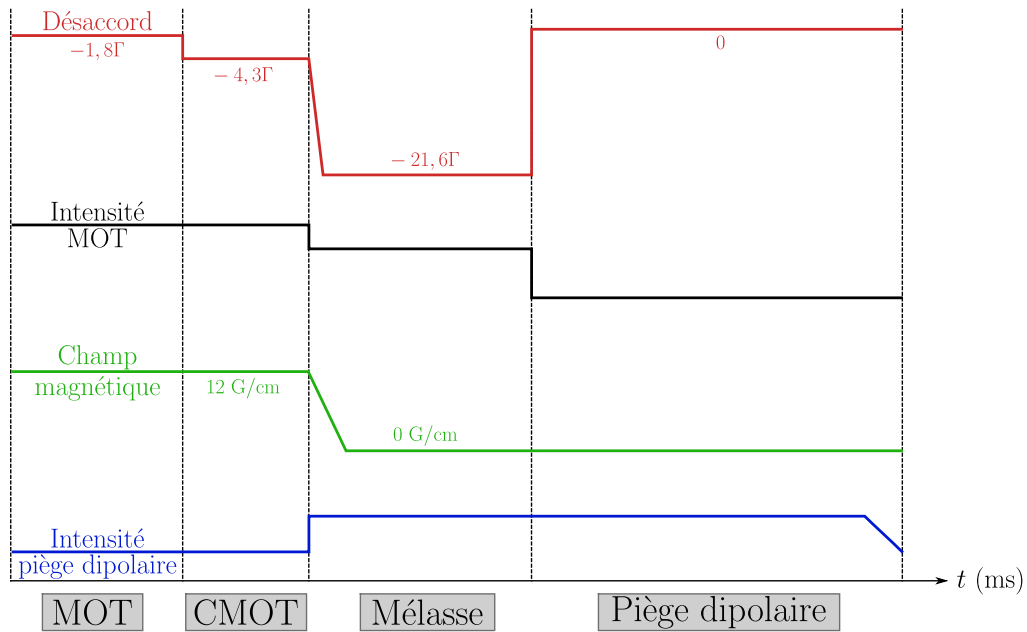


Fig. 4.38 Séquence temporelle de refroidissement.

**Conclusion** J'ai présenté le dispositif expérimental que j'ai réalisé, dans le but de réaliser un condensat de Bose-Einstein de  $^{87}\text{Rb}$  qui sera utilisé pour l'interférométrie atomique. Celui-ci est fonctionnel, et permet d'obtenir un nuage d'atomes froids. L'étape de refroidissement évaporatif est en cours de mise en œuvre. J'ai décrit l'enceinte à vide réalisée, ainsi que l'observation du phénomène d'instabilité de l'argon. Je décris de plus les sources lasers développées pour l'expérience ainsi que les étapes du piégeage et de refroidissement laser des atomes. J'ai de plus présenté les résultats préliminaires qui ont été obtenus. Enfin, j'ai présenté les mesures de fréquences que j'ai réalisées en parallèle de la construction de la nouvelle expérience.





# Conclusion et perspectives

Le travail de thèse que nous avons présenté, au sujet de l'interférométrie atomique utilisant un condensat de Bose-Einstein comme source d'atomes, s'est articulé autour de deux axes : d'une part l'étude de l'effet des interactions dans différentes configurations interférométriques, et d'autre part, la conception et la construction d'un nouveau dispositif expérimental.

Nous avons tout d'abord rappelé le principe de l'interférométrie atomique et présenté les enjeux de la nouvelle génération d'expériences pour la physique fondamentale. L'intérêt majeur des gaz condensés réside en une extension spatiale réduite ainsi qu'une distribution en vitesse plus fine. Cette caractéristique propre à ce type de sources atomiques permet de diminuer l'effet systématique lié à la courbure des fronts d'onde, et s'avère extrêmement adaptée à l'implémentation de nouvelles techniques, telles que les séparatrices à large transfert d'impulsion. Dans ce contexte, nous avons décrit différentes expériences visant à mettre en œuvre l'interférométrie atomique avec des condensats de Bose-Einstein pour effectuer des mesures de haute précision dans le but de tester la physique fondamentale. Nous avons ensuite présenté les spécificités de ces sources atomiques, et décrit les techniques expérimentales permettant de les obtenir expérimentalement.

Nous effectuons ensuite une étude détaillée de l'effet des interactions entre atomes au sein d'une séquence interférométrique. Nous avons ainsi développé un modèle analytique qui nous permet d'obtenir des expressions simples et dépendant des paramètres expérimentaux permettant de calculer le déphasage induit par les interactions entre atomes. Nous mettons en évidence le fait que le déphasage induit par les interactions sur un interféromètre fondé sur des impulsions lasers dépend principalement de la symétrie en nombre d'atomes entre ses deux bras. Nous avons de plus développé une méthode de résolution numérique des

équations de Gross-Pitaevskii couplées, et comparé les résultats obtenus avec celle-ci avec notre modèle. Nous obtenons un excellent accord entre les deux. Nous avons ensuite appliqué notre modèle au cas de la fontaine de 10 m réalisée à Stanford, dans laquelle l'interféromètre, en configuration Mach-Zehnder, est réalisé avec des temps d'interrogation de l'ordre de 2 s. Nous mettons en évidence l'effet de l'expansion spatiale des nuages d'atomes au cours de la chute libre, qui induit une dilution progressive des nuages et provoque ainsi une dissymétrie entre les deux moitiés de l'interféromètre. Nous estimons ainsi des déphasages impliquant un effet systématique de l'ordre de  $10^{-11}$  sur la mesure de  $g$ . Enfin, nous considérons la technique de la double diffraction et montrons que celle-ci permet de s'affranchir de l'effet des interactions.

Enfin, nous avons présenté le dispositif expérimental de la nouvelle expérience, que nous avons conçue. Celle-ci a pour objectif la mise en œuvre d'un interféromètre de type Ramsey-Bordé utilisant un condensat de Bose-Einstein. L'enceinte à vide est réalisée en titane afin de s'affranchir de tout champ magnétique parasite. Le principe de l'expérience repose sur le chargement d'un piège magnéto-optique à 3D par un PMO 2D, suivi d'une phase d'évaporation. La zone interférométrique est, elle, constituée d'un tube vertical, long de 70 cm, magnétiquement isolé, et d'une cellule de détection. Nous avons caractérisé le nuage d'atomes obtenu avant le chargement du piège dipolaire et obtenons à peu près  $7 \times 10^8$  atomes dans un nuage de l'ordre de 1,5 mm.

Le premier objectif à court terme est d'optimiser le chargement des atomes dans le piège dipolaire, et la séquence d'évaporation, afin d'obtenir un condensat de Bose-Einstein constitué de  $10^5$  atomes à une température de l'ordre d'une centaine de nanokelvins. La seconde étape consistera à ajouter les lasers Raman et à mettre en place la séquence interférométrique. L'objectif à ce stade sera de valider expérimentalement le modèle que j'ai présenté pour la détermination du déphasage dû aux interactions entre les atomes. Enfin, les objectifs à plus long terme correspondent à la mise en œuvre du gravimètre compact, et à la réalisation de mesures gradiométriques grâce à ce dernier.

# Annexes

## A Résolution numérique des équations de Gross-Pitaevskii couplées et simulation de la séquence interférométrique

### A.1 Equations de Gross-Pitaevskii couplées à 1D

On considère un condensat de Bose-Einstein constitué d'atomes possédant deux états internes, notés  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$ . Ces deux niveaux sont couplés par une transition Raman à deux photons. Celle-ci est réalisée grâce à deux ondes lumineuses contre-propageantes, de vecteurs d'onde et pulsations respectifs  $\mathbf{k}_1, \omega_1$  et  $\mathbf{k}_2, \omega_2$ . En plus de coupler les deux états atomiques, cette transition transfère une impulsion de  $\hbar\Delta\mathbf{k}$  aux atomes, où  $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \simeq 2\mathbf{k}$ . Dans la suite, on considère le système comme un système à deux niveaux effectifs.

La fonction d'onde totale du système  $|\Psi\rangle$  s'écrit :

$$|\Psi\rangle = \Psi_1(\mathbf{r}, t)|1\rangle + \Psi_2(\mathbf{r}, t)|2\rangle. \quad (\text{A.1})$$

Les fonctions d'onde sont ici normalisées par le nombre d'atomes, de telle sorte que

$$\sum_i \int d^3\mathbf{r} |\Psi_i|^2 = \sum_i N_i = N, \quad (\text{A.2})$$

avec  $N$  le nombre total d'atomes. L'évolution temporelle du condensat est décrite par les équations de Gross-Pitaevskii couplées, qui s'écrivent :

$$i\hbar \dot{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathcal{H}}\Psi(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A.3})$$

où l'hamiltonien total du système s'écrit comme une matrice  $2 \times 2$  dans la base des états internes  $|1\rangle, |2\rangle$  :

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \hat{H}_{11} & \hat{H}_{12} \\ \hat{H}_{21} & \hat{H}_{22} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Les éléments diagonaux de  $\hat{\mathcal{H}}$  sont donnés, dans l'approximation de l'onde tournante, par :

$$\hat{H}_{11} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + g_{11}|\Psi_1|^2 + g_{12}|\Psi_2|^2, \quad (\text{A.5})$$

$$\hat{H}_{22} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + g_{21}|\Psi_1|^2 + g_{22}|\Psi_2|^2 + \hbar\delta, \quad (\text{A.6})$$

où les termes  $g_{ij}|\Psi_j|^2$  représentent les interactions dans l'approximation de champ moyen dues au paquet atomique dans le niveau  $j$  et subies par celui dans le niveau  $i$ , et  $\delta$  est le désaccord à la transition à deux photons. La partie non diagonale de l'hamiltonien représente le couplage entre les états  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$ , dû à la présence des lasers Raman. Ceux-ci s'écrivent :

$$\hat{H}_{12} = \hat{H}_{21}^\dagger = \frac{\hbar\Omega}{2}e^{-i\Delta kx}, \quad (\text{A.7})$$

où  $\Omega$  est réelle et correspond à la pulsation de Rabi effective de la transition Raman, et  $\Delta k \simeq 2k$  correspondant à l'impulsion transférée par les deux faisceaux contre-propageant aux atomes.

On peut enfin réécrire  $\hat{\mathcal{H}}$  en représentation d'interaction, en prenant  $\hat{\mathcal{H}}_0$  tel que :

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hbar\delta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Dans cette représentation, les éléments de matrice de  $\hat{\mathcal{H}}_I = e^{i\hat{\mathcal{H}}_0 t/\hbar}(\hat{\mathcal{H}} - \hat{\mathcal{H}}_0)e^{-i\hat{\mathcal{H}}_0 t/\hbar}$  s'écrivent :

$$\hat{H}_{11} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + g_{11}|\Psi_1|^2 + g_{12}|\Psi_2|^2, \quad (\text{A.9})$$

$$\hat{H}_{22} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + g_{21}|\Psi_1|^2 + g_{22}|\Psi_2|^2, \quad (\text{A.10})$$

$$\hat{H}_{12} = \hat{H}_{21}^* = \frac{\hbar\Omega}{2}e^{-i(\Delta kx + \delta t)}. \quad (\text{A.11})$$

Afin d'optimiser la résolution numérique et puisque l'on ne transfère d'impulsion aux atomes que dans une direction, on peut intégrer les équations de Gross-Pitaevskii sur les directions transverses. On aura alors un système d'équations unidimensionnelles moins coûteux à résoudre en mémoire et en temps de calcul. On peut de plus supposer que les paquets d'onde suivent une dynamique balistique d'étalement transverse, dans la mesure où les densités que l'on considérera correspondent à des énergies d'interactions très faibles, qui n'auront donc pas d'influence sur cette dynamique. Les constantes d'interaction 1D s'écrivent dans ces conditions :

$$g_{ij} = \frac{2\hbar^2 a_{ij}}{mw_{\perp}^2} \text{ avec } w_{\perp}(t) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar t}{2mw_0}\right)^2}, \quad (\text{A.12})$$

où  $w_0$  correspond à l'extension transverse initiale du nuage d'atomes. On note qu'une telle expression pour l'évolution temporelle de  $w_{\perp}$  correspond à un ansatz justifié par le régime de faibles interactions dans lequel on se place.

**Changement de référentiel** Afin d'optimiser les temps de résolution numérique, il peut être utile de résoudre ces équations dans les référentiels en mouvement avec chacun des nuages atomiques. On définit les référentiels galiléens  $\mathcal{R}'$ , en mouvement à la vitesse  $v_1$ , du centre de masse du nuage dans  $|1\rangle$ , et  $\mathcal{R}''$ , à  $v_2$ , de celui dans  $|2\rangle$ . Le référentiel du laboratoire est noté  $\mathcal{R}[x, t]$ .

Les deux équations de Gross-Pitaevskii couplées s'écrivent dans  $\mathcal{R}$  :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1(x, t)}{\partial t} = \left( \frac{P^2}{2m} + g_{11} |\Psi_1(x, t)|^2 + g_{12} |\Psi_2(x, t)|^2 \right) \Psi_1(x, t) + \frac{\hbar \Omega}{2} e^{-i(\Delta k x + \delta t)} \Psi_2(x, t),$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_2(x, t)}{\partial t} = \left( \frac{P^2}{2m} + g_{12} |\Psi_1(x, t)|^2 + g_{22} |\Psi_2(x, t)|^2 \right) \Psi_2(x, t) + \frac{\hbar \Omega}{2} e^{i(\Delta k x + \delta t)} \Psi_1(x, t).$$

Le changement de référentiel de  $\mathcal{R}$  vers  $\mathcal{R}'$  est donné par :

$$x \rightarrow x' = x - v_1 t, \\ \Psi(x, t) \rightarrow \Psi'(x', t) = e^{-i(mv_1 x)/\hbar} \Psi(x, t).$$

Dans ce référentiel, l'opérateur impulsion s'écrit :

$$P \rightarrow P' = P - mv_1.$$

Un changement de référentiel équivalent pour  $\mathcal{R}''$  peut être effectué.

En utilisant ces transformations dans les équations de Gross-Pitaevskii, on obtient deux équations qui s'écrivent :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi'_1(x',t)}{\partial t} = \left( \frac{P'^2}{2m} + v_1 P' - \frac{mv_1^2}{2} + g_{11} |\Psi'_1(x',t)|^2 + g_{12} |\Psi''_2(x'',t)|^2 \right) \Psi'_1(x',t) + \frac{\hbar\Omega}{2} e^{-i\delta t} \Psi''_2(x'',t),$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi''_2(x'',t)}{\partial t} = \left( \frac{P''^2}{2m} + v_2 P'' - \frac{mv_2^2}{2} + g_{12} |\Psi'_1(x',t)|^2 + g_{22} |\Psi''_2(x'',t)|^2 \right) \Psi''_2(x'',t) + \frac{\hbar\Omega}{2} e^{i\delta t} \Psi'_1(x',t),$$

dans lesquelles on a utilisé le fait que la différence de vitesse entre les deux nuages d'atomes est telle que  $v_2 - v_1 = 2v_r$ , de manière à pouvoir faire disparaître les termes en  $e^{\pm i\Delta k x}$ . Le système d'équations que l'on a obtenu possède l'avantage qu'il nous permet de coupler les deux fonctions d'onde dans leur référentiel respectif. On pourra alors limiter la fenêtre spatiale sur laquelle on résout numériquement ces équations, permettant de réduire les temps de calcul.

## A.2 Méthode numérique

Le système d'équations à résoudre peut s'écrire comme :

$$\Psi(t + \Delta t) = \exp \left( -i\Delta t \frac{\hat{\mathcal{H}}(t)}{\hbar} \right) \Psi(t) \text{ avec } \Psi(t) = \begin{pmatrix} \Psi'_1(x',t) \\ \Psi''_2(x'',t) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

On peut décomposer l'Hamiltonien  $\hat{\mathcal{H}}(t)$  en une partie cinétique  $\hat{\mathcal{K}}$ , indépendante du temps, et une partie potentielle  $\hat{\mathcal{V}}(t)$ , de telle sorte que l'on ait :

$$\hat{\mathcal{K}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \begin{pmatrix} \partial_{x'}^2 + i\frac{2mv_1}{\hbar} \partial_{x'} & 0 \\ 0 & \partial_{x''}^2 + i\frac{2mv_2}{\hbar} \partial_{x''} \end{pmatrix}, \text{ et} \quad (\text{A.14})$$

$$\hat{\mathcal{V}}(t) = \begin{pmatrix} g_{11} |\Psi'_1(x',t)|^2 + g_{12} |\Psi''_2(x'',t)|^2 - \frac{mv_1^2}{2} & \frac{\hbar\Omega}{2} e^{-i\delta t} \\ \frac{\hbar\Omega}{2} e^{i\delta t} & g_{21} |\Psi'_1(x',t)|^2 + g_{22} |\Psi''_2(x'',t)|^2 - \frac{mv_2^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

On peut ainsi réécrire l'expression (A.13) telle que :

$$\Psi(t + \Delta t) = e^{-i\Delta t (\hat{\mathcal{K}} + \hat{\mathcal{V}}(t)) / \hbar} \Psi(t). \quad (\text{A.16})$$

Pour intégrer numériquement l'expression précédente, on développe l'opérateur exponentiel [Ando et al., 2011, Suzuki, 1990] sur l'intervalle de temps  $\Delta t$  :

$$\Psi(t + \Delta t) = \exp\left(-i\frac{\Delta t}{2}\frac{\hat{K}}{\hbar}\right) \exp\left(-i\Delta t\frac{\hat{V}(t + \Delta t/2)}{\hbar}\right) \exp\left(-i\frac{\Delta t}{2}\frac{\hat{K}}{\hbar}\right) \Psi(t). \quad (\text{A.17})$$

Le calcul des fonctions d'onde au temps  $t + \Delta t$  à partir de celles à  $t$  sera ainsi effectué en trois étapes : on commence par appliquer  $\hat{K}$  sur un demi intervalle de temps  $\Delta t/2$ , puis l'on applique la valeur de  $\hat{V}$  au centre de l'intervalle de temps  $\Delta t$ , enfin on applique à nouveau  $\hat{K}$  sur  $\Delta t/2$ . Cette méthode est stable et efficace. De plus, la partie cinétique ne dépend pas de l'état interne, elle peut donc s'appliquer indépendamment sur les deux fonctions d'onde. Elle possède cependant une action non-locale. La partie potentielle, quant à elle, couple les deux fonctions d'onde mais agit localement sur celles-ci. Le développement précédent permet ainsi de décorréler un opérateur agissant localement sur les deux états d'un autre agissant non-localement mais indépendamment sur eux.

On discrétise les variables  $x$  et  $t$  de telle sorte que  $x = j\Delta x$  et  $t = k\Delta t/2$ , avec  $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/N_x$  et  $\Delta t = (t_{max} - t_0)/N_t$ . Les fonctions d'onde de chaque état  $|i\rangle$  s'écrivent ainsi  $\Psi_i(x, t) = \Psi_{i,j}^k$ . Chaque étape de résolution, correspondant à un intervalle de temps  $\Delta t$ , pourra donc être décomposée suivant le schéma suivant :

- récupération des deux fonctions d'onde résultant de l'étape précédente  $\rightarrow \Psi_{i,j}^k$
- application de l'opérateur d'évolution cinétique pour un intervalle  $\Delta t/2$  indépendamment à chacune des deux fonctions d'onde  $\rightarrow \Psi_{i,j}^{k+1}$
- détermination de  $\hat{V}_j^{k+1}$  avec  $\Psi_{i,j}^{k+1}$
- application de l'opérateur d'évolution potentielle en chaque point des fonctions d'onde  $\Psi_{i,j}^{k+1}$
- seconde application de l'opérateur d'évolution cinétique (sur un intervalle  $\Delta t/2$ )
- récupération du résultat  $\Psi_{i,j}^{k+2}$  et retour à la première étape.

## Partie cinétique

La partie cinétique peut être résolue numériquement grâce à une méthode des différences finies. La méthode de Crank-Nicolson possède l'avantage d'être



stable et unitaire. Si l'on applique  $\hat{\mathcal{K}}$  sur un intervalle de temps  $\Delta t/2$  à la fonction d'onde de l'état  $|i\rangle$ , on aura :

$$\Psi_i(x, t + \Delta t/2) = \exp\left(-i \frac{\Delta t}{2} \frac{\hat{\mathcal{K}}}{\hbar}\right) \Psi_i(x, t), \quad (\text{A.18})$$

que l'on peut développer en :

$$\left(1 + i \frac{\Delta t}{4} \frac{\hat{\mathcal{K}}}{\hbar}\right) \Psi_i(x, t + \Delta t/2) = \left(1 - i \frac{\Delta t}{4} \frac{\hat{\mathcal{K}}}{\hbar}\right) \Psi_i(x, t). \quad (\text{A.19})$$

L'opérateur  $\hat{\mathcal{K}}$  appliqué à la fonction d'onde  $\Psi_{i,j}^k$  peut s'écrire :

$$\hat{\mathcal{K}}\Psi_{i,j}^k = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\Psi_{i,j+1}^k + \Psi_{i,j-1}^k - 2\Psi_{i,j}^k}{2\Delta x^2} + i \frac{2mv_i}{\hbar} \frac{\Psi_{i,j+1}^k - \Psi_{i,j-1}^k}{2\Delta x} \right). \quad (\text{A.20})$$

L'expression (A.19) se réécrit donc de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (1 + iK) \Psi_{i,j}^{k+1} + \left(-i \frac{K}{2} + \kappa_i\right) \Psi_{i,j+1}^{k+1} + \left(-i \frac{K}{2} - \kappa_i\right) \Psi_{i,j-1}^{k+1} \\ = (1 - iK) \Psi_{i,j}^k + \left(i \frac{K}{2} - \kappa_i\right) \Psi_{i,j+1}^k + \left(i \frac{K}{2} + \kappa_i\right) \Psi_{i,j-1}^k, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

où l'on définit :

$$K = \frac{\hbar}{8m} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \text{ et } \kappa_i = \frac{v_i}{8} \frac{\Delta t}{\Delta x}. \quad (\text{A.22})$$

L'équation d'évolution s'écrit alors de façon matricielle dans la base des indices spatiaux  $j$  :

$$A_i \Psi_i^{k+1} = B_i \Psi_i^k \quad (\text{A.23})$$

avec

$$A_i = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & a & \alpha_i^* & & \\ & -\alpha_i & a & \alpha_i^* & \\ & & -\alpha_i & a & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

et

$$B_i = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & b & -\alpha_i^* & & \\ & \alpha_i & b & -\alpha_i^* & \\ & & \alpha_i & b & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (\text{A.25})$$

où l'on a posé  $\alpha_i = \kappa_i + iK/2$ ,  $a = 1 + iK$  et  $b = 1 - iK$ .

Ce système de matrices tridiagonales peut se résoudre grâce à l'algorithme de Thomas. En effet, le système peut s'écrire comme un système de  $N_x$  équations de la forme :

$$-\alpha_i \Psi_{i,j-1}^{k+1} + a \Psi_{i,j}^{k+1} + \alpha_i^* \Psi_{i,j+1}^{k+1} = d_{i,j}, \quad (\text{A.26})$$

où les  $d_{i,j}$  sont donnés par le produit  $B_i \Psi_i^k$  :

$$d_{i,j} = \alpha_i \Psi_{i,j-1}^k + b \Psi_{i,j}^k - \alpha_i^* \Psi_{i,j+1}^k. \quad (\text{A.27})$$

La technique de résolution, qui correspond à un pivot de Gauss, consiste à effectuer une première boucle dans le sens des  $j$  croissants de façon à calculer les nouveaux coefficients suivants :

$$c'_{i,j} = \begin{cases} \alpha_i^*/a & j = 1 \\ \frac{\alpha_i}{a + \alpha_i c'_{i,j-1}} & j = 2, \dots, N_x - 1 \end{cases} \text{ et } d'_{i,j} = \begin{cases} d_{i,j}/a & j = 1 \\ \frac{d_{i,j} + \alpha_i d_{i,j-1}}{a + \alpha_i c'_{i,j-1}} & j = 2, \dots, N_x \end{cases}. \quad (\text{A.28})$$

Une seconde boucle dans le sens inverse permet d'obtenir les solutions :

$$\Psi_{i,N_x}^{k+1} = d'_{i,N_x} \quad (\text{A.29})$$

$$\Psi_{i,j}^{k+1} = d'_{i,j} - c'_{i,j} \Psi_{i,j+1}^{k+1} \text{ pour } j = N_x - 1, \dots, 1. \quad (\text{A.30})$$

Il est à noter que le critère de convergence de cette méthode de résolution est donné par :

$$\frac{\hbar}{m} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}. \quad (\text{A.31})$$

## Partie potentielle

L'expression de la partie potentielle est donnée par l'expression (A.15), que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\hat{\mathcal{V}} = \frac{V_+}{2}I + \frac{\hbar\Omega}{2}\cos(\delta t)\sigma_x - \frac{\hbar\Omega}{2}\sin(\delta t)\sigma_y + \frac{V_-}{2}\sigma_z, \quad (\text{A.32})$$

avec  $I$  la matrice identité,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$  les matrices de Pauli, et :

$$V_+ = (g_{11} + g_{21})|\Psi'_1(x',t)|^2 + (g_{12} + g_{22})|\Psi''_2(x'',t)|^2 - \frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2), \quad (\text{A.33})$$

$$V_- = (g_{11} - g_{21})|\Psi_1(x,t)|^2 + (g_{12} - g_{22})|\Psi_2(x,t)|^2 + \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2). \quad (\text{A.34})$$

On peut alors utiliser la formule :

$$e^{ia(\hat{n}.\vec{\sigma})} = \cos aI + i \sin a(\hat{n}.\vec{\sigma}), \quad (\text{A.35})$$

où  $\vec{\sigma}$  est le vecteur de Pauli et  $\hat{n}$  un vecteur normé. On a alors explicitement l'expression de  $e^{-i\hat{\mathcal{V}}\Delta t/\hbar}$ , qui est donnée par :

$$e^{-i\hat{\mathcal{V}}\Delta t/\hbar} = e^{-iV_+\Delta t/(2\hbar)} \left\{ \cos(\Omega_{eff}\Delta t/2)I + i \sin(\Omega_{eff}\Delta t/2) \cdots \right. \\ \left. \times [-\Omega \cos(\delta t)\sigma_x + \Omega \sin(\delta t)\sigma_y - V_-\sigma_z] / \Omega_{eff} \right\}, \quad (\text{A.36})$$

où l'on a posé  $\Omega_{eff} = \sqrt{\Omega^2 + (V_-/\hbar)^2}$ .

On obtient ainsi une matrice  $2 \times 2$  dont l'expression est explicite. Celle-ci est de plus locale. En effet, à chaque position sont associés quatre éléments de matrice. L'application de la partie potentielle de l'évolution pourra donc se faire indépendamment en chaque point, de telle sorte que l'on aura à calculer  $e^{-i\Delta t\hat{\mathcal{V}}_j/\hbar}\Psi_j^{k+1}$  (avec  $\Psi_j^{k+1} = \Psi_{1,j}^{k+1}|1\rangle + \Psi_{2,j}^{k+1}|2\rangle$ ) pour tous les points  $j$  de la grille.

## A.3 Simulation de la séquence interférométrique

Pour simuler la séquence complète de l'interféromètre, on définit des plages temporelles pendant lesquelles le couplage  $\Omega$  est allumé, correspondant aux impulsions Raman. Pendant tout le reste de la séquence, ce couplage est pris nul, de façon à laisser les fonctions d'onde de chacun des niveaux évoluer librement. La figure A.39 présente les trajectoires des nuages d'atomes dans les deux bras

de l'interféromètre obtenues en simulant la séquence complète.

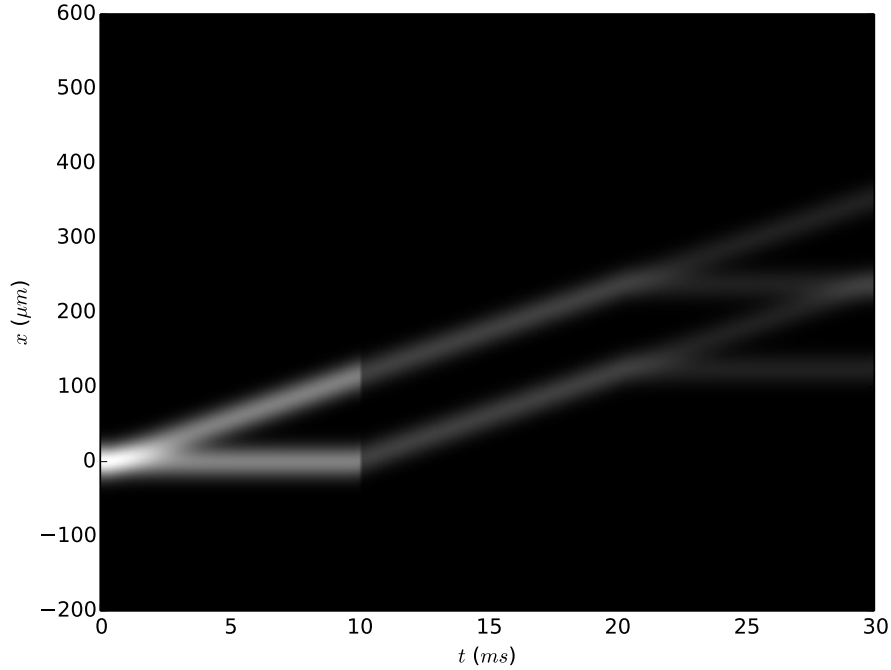


Fig. A.39 Trajectoires des atomes dans les deux bras de l'interféromètre, sans champ moyen, pour une largeur du nuage initial  $w = 30\mu\text{m}$ , et pour les temps  $T = T' = 10\text{ms}$ . Par souci de clarté, on a représenté les fonctions d'onde des deux niveaux hyperfins sur le même diagramme de façon à laisser apparaître les deux trajectoires possibles pour les paquets qui interfèrent à la fin de la séquence.

Chaque séquence simulée, avec un désaccord  $\delta = \delta_{\text{sel}} - \delta_{\text{mes}}$ , nous permet d'obtenir un point de la figure d'interférence. En faisant varier linéairement le désaccord, on obtient une figure d'interférences, dont la forme typique est donnée par la figure A.40. La frange centrale du spectre nous donne accès à la différence de phase entre les deux bras. Afin de déterminer  $\delta_0$  et de limiter les temps de calcul, on fait varier  $\delta$  autour de 0 sur une plage typique d'une centaine de hertz. La position de la frange centrale est alors obtenue par ajustement numérique avec une sinusoïde, ce qui est présenté dans la figure A.41.

Concrètement, nous utilisons des grilles spatiales typiques de pas  $\Delta x$  de l'ordre de 40 nm, un pas temporel  $\Delta t$  de 1  $\mu\text{s}$ . Pour de tels paramètres, la simulation d'une séquence de l'interféromètre avec  $T = T' = 10\text{ ms}$  pour une valeur du désaccord  $\delta$  est réalisée en à peu près 3 min. Un spectre d'une dizaine

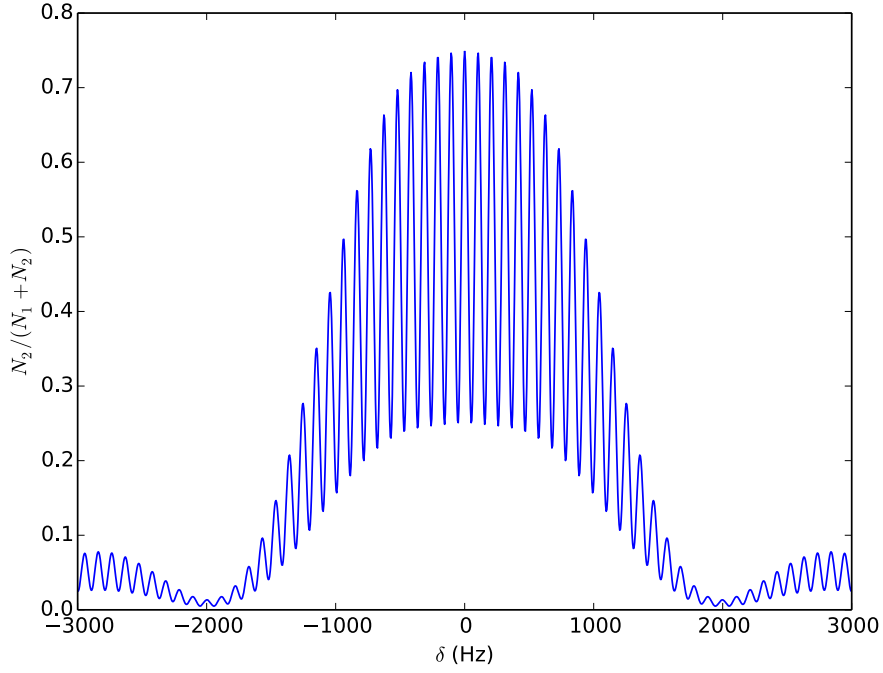


Fig. A.40 Spectre obtenu sans interactions entre atomes, pour un paquet initial de largeur  $30 \mu\text{m}$ , avec  $\tau/2 = 1 \text{ ms}$ ,  $T = 9.5 \text{ ms}$  et  $T' = 10 \text{ ms}$ .

de points est alors obtenu en une trentaine de minutes.

## B Détermination de l'ordre 1 de l'opérateur d'évolution

L'opérateur d'évolution du système non perturbé est donné par :

$$U_0(t) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t/2) & -i \sin(\Omega t/2) \\ -i \sin(\Omega t/2) & \cos(\Omega t/2) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

La perturbation  $V(t)$  est, elle, donnée par :

$$V(t) = \begin{pmatrix} |c_1|^2 \hbar \omega_{11} + |c_2|^2 \hbar \omega_{12} & 0 \\ 0 & |c_1|^2 \hbar \omega_{22} + |c_1|^2 \hbar \omega_{12} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

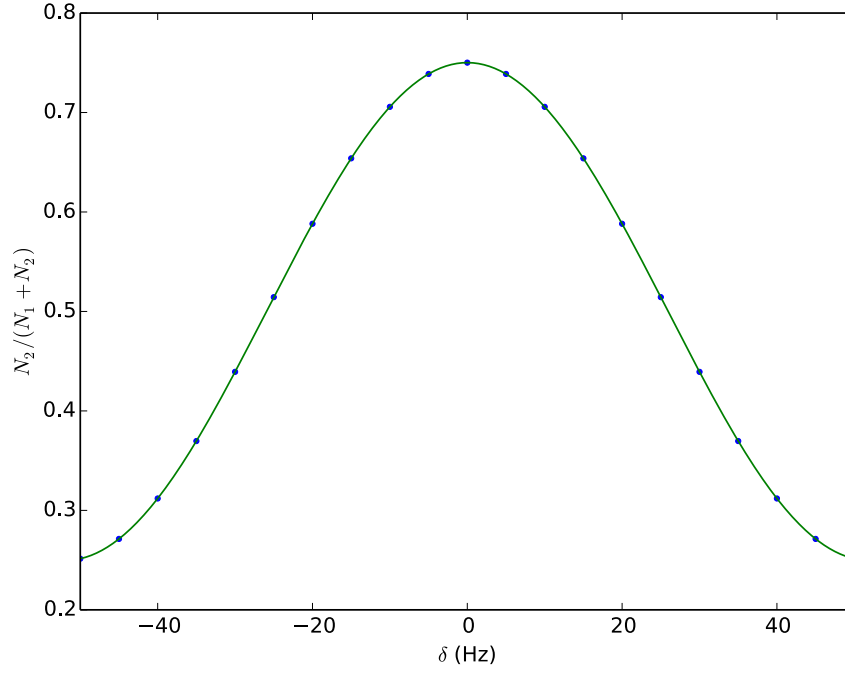


Fig. A.41 Frange centrale du spectre obtenu pour un paquet initial de largeur  $30 \mu m$ , avec  $\tau/2 = 1 ms$ ,  $T = 9.5 ms$  et  $T' = 10 ms$ . Les points bleus représentent les résultats de la simulation numérique de la séquence interférométrique, et la courbe verte correspond à l'ajustement par une fonction sinus permettant de déterminer la position de la frange centrale.

avec  $|c_1|^2$  et  $|c_2|^2$  donnés par :

$$|c_1(t)|^2 = a_1^2 \cos^2(\Omega t/2) + a_2^2 \sin^2(\Omega t/2) + 2a_1 a_2 \cos \varphi \cos(\Omega t/2) \sin(\Omega t/2), \quad (B.3)$$

$$|c_2(t)|^2 = a_1^2 \sin^2(\Omega t/2) + a_2^2 \cos^2(\Omega t/2) - 2a_1 a_2 \cos \varphi \cos(\Omega t/2) \sin(\Omega t/2). \quad (B.4)$$

Le terme de premier ordre du développement de l'opérateur d'évolution en perturbation est donné par :

$$\delta U(t) = \int_0^t U_0(t - \tau) V(\tau) U_0(\tau) d\tau. \quad (B.5)$$

En remplaçant  $U_0(t)$  et  $V(t)$ , et en posant  $c = \cos(\Omega \tau/2)$ ,  $s = \sin(\Omega \tau/2)$ ,  $c' =$

$\cos(\Omega(t - \tau)/2)$  et  $s' = \sin(\Omega(t - \tau)/2)$ , on trouve les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \delta U_{11} = & -\frac{i}{\hbar} \int d\tau \left[ \hbar\omega_{11} \left( a_1^2 c' c^3 + a_2^2 c' c s^2 + 2a_1 a_2 \cos \varphi c' c^2 s \right) \right. \\ & - \hbar\omega_{22} \left( a_1^2 s' s^3 + a_2^2 s' c^2 s - 2a_1 a_2 \cos \varphi s' c s^2 \right) \\ & \left. + \hbar\omega_{12} \left( a_1^2 (c' c s^2 - s' c^2 s) + a_2^2 (c' c^3 - s' s^3) - 2a_1 a_2 \cos \varphi (c' c^2 s + s' c s^2) \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \delta U_{12} = & -\frac{i}{\hbar} \int d\tau \left[ \hbar\omega_{11} \left( a_1^2 c' s c^2 + a_2^2 c' s^3 + 2a_1 a_2 \cos \varphi c' c s^2 \right) \right. \\ & + \hbar\omega_{22} \left( a_1^2 s' c s^2 + a_2^2 s' c^3 - 2a_1 a_2 \cos \varphi s' c^2 s \right) \\ & \left. + \hbar\omega_{12} \left( a_1^2 (c' s^3 + s' c^3) + a_2^2 (c' c^2 s + s' c s^2) + 2a_1 a_2 \cos \varphi (s' c^2 s - c' c s^2) \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} \delta U_{21} = & -\frac{i}{\hbar} \int d\tau \left[ \hbar\omega_{11} \left( a_1^2 s' c^3 + a_2^2 s' c s^2 + 2a_1 a_2 \cos \varphi s' c^2 s \right) \right. \\ & + \hbar\omega_{22} \left( a_1^2 c' s^3 + a_2^2 c' c^2 s - 2a_1 a_2 \cos \varphi c' c s^2 \right) \\ & \left. + \hbar\omega_{12} \left( a_1^2 (s' c s^2 + c' c^2 s) + a_2^2 (s' c^3 + c' s^3) + 2a_1 a_2 \cos \varphi (c' c s^2 - s' c^2 s) \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} \delta U_{22} = & -\frac{i}{\hbar} \int d\tau \left[ \hbar\omega_{11} \left( a_1^2 s' s c^2 + a_2^2 s' s^3 + 2a_1 a_2 \cos \varphi s' c s^2 \right) \right. \\ & - \hbar\omega_{22} \left( a_1^2 c' c s^2 + a_2^2 c' c^3 - 2a_1 a_2 \cos \varphi c' c^2 s \right) \\ & \left. + \hbar\omega_{12} \left( a_1^2 (s' s^3 - c' c^3) + a_2^2 (s' c^2 s - c' c s^2) - 2a_1 a_2 \cos \varphi (s' c s^2 + c' c^2 s) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

On peut tout de suite remarquer la symétrie entre les termes dépendant de  $\omega_{11}$  et  $\omega_{22}$  entre les éléments  $\delta U_{11}$  et  $\delta U_{22}$  et  $\delta U_{12}$  et  $\delta U_{21}$ . De plus, les termes d'interactions mutuelles sont antisymétriques. En intégrant les expressions précédentes, on peut écrire les éléments de matrice  $\delta U_{ij}(t)$  de manière générale comme :

$$\delta U_{ij}(t) = -i^{\delta_{ij}} \sum_{k,l} \frac{\omega_{kl}}{4\Omega} \left( a_1^2 F_{ijkl}(t) + a_2^2 G_{ijkl}(t) + 2a_1 a_2 \cos \varphi H_{ijkl}(t) \right), \quad (\text{B.10})$$

Table B.3 Expressions des éléments de matrice  $F_{ijkl}(t)$  and  $H_{ijkl}(t)$ .

| $F_{ijkl}(t)$ |                    |                 |                  |                 |
|---------------|--------------------|-----------------|------------------|-----------------|
|               | $ij$               |                 |                  |                 |
| $kl$          | 11                 | 12              | 21               | 22              |
| 11            | $3yC + 3SC^2 + 2S$ | $yS + 3CS^2$    | $3yS + CS^2$     | $yC - S^3 - S$  |
| 12            | $yC - SC^2$        | $3yS - CS^2$    | $yS + CS^2$      | $3yC + SC^2$    |
| 22            | $3yC - SC^2 - 2S$  | $yS - CS^2$     | $3yS - 3CS^2$    | $yC + 3S^3 - S$ |
| $H_{ijkl}(t)$ |                    |                 |                  |                 |
|               | $ij$               |                 |                  |                 |
| $kl$          | 11                 | 12              | 21               | 22              |
| 11            | $yS + 3CS^2$       | $yC + 3S^3 - S$ | $-yC + S^3 + S$  | $-yS + CS^2$    |
| 12            | $-yS - CS^2$       | $-yC + SC^2$    | $yC - SC^2$      | $yS + CS^2$     |
| 22            | $yS - CS^2$        | $yC - S^3 - S$  | $-yC - 3S^3 + S$ | $-yS - 3CS^2$   |

dont les expressions des éléments de  $F$  et  $H$  sont données dans le tableau B.3, où l'on a posé  $y = \Omega t/2$ ,  $C = \cos y$  et  $S = \sin y$ . Etant données les symétries entre les états  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$ , on a :

$$F_{ijkl} = G_{i\bar{j}k\bar{l}} \text{ et } H_{ijkl} = -H_{i\bar{j}k\bar{l}}, \quad (\text{B.11})$$

avec  $\bar{i}$  représentant l'état opposé à  $i$  défini tel que  $\bar{i} = 3 - i$ .

## C Publications





# Compact atomic gravimeter based on a pulsed and accelerated optical lattice

Manuel Andia,<sup>1</sup> Raphaël Jannin,<sup>1</sup> François Nez,<sup>1</sup> François Biraben,<sup>1</sup> Saïda Guellati-Khélifa,<sup>1,2,\*</sup> and Pierre Cladé<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Laboratoire Kastler Brossel, Ecole Normale Supérieure, Université Pierre et Marie Curie, CNRS, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France*

<sup>2</sup>*Conservatoire National des Arts et Métiers, 292 rue Saint Martin, 75141 Paris Cedex 03, France*

(Received 19 June 2013; published 25 September 2013)

We present a scheme of a compact atomic gravimeter based on atom interferometry. Atoms are maintained against gravity using a sequence of coherent accelerations performed by the Bloch oscillations technique. We demonstrate a sensitivity of  $4.8 \times 10^{-8}$  with an integration time of 4 min. Combining this method with an atomic elevator allows us to measure the local gravity at different positions in the vacuum chamber. This method can be of relevance to improve the measurement of the Newtonian gravitational constant  $G$ .

DOI: [10.1103/PhysRevA.88.031605](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.88.031605)

PACS number(s): 37.25.+k, 37.10.Jk, 06.20.Jr, 06.30.Gv

Atom interferometry has proven to be a reliable method to realize robust inertial sensors [1–9]. The performance of these devices rivals state-of-the-art sensors based on other methods. The record sensitivity of  $8 \times 10^{-9} g$  at 1 s is achieved for the measurement of the gravity acceleration  $g$  [10,11], allowing precise determination of the gravity gradient and the Newtonian gravitational constant  $G$  [12,13]. In such atom interferometers, the inertial phase shift scales quadratically with the interrogation time. An accurate measurement of the gravity acceleration requires a long time of free fall and should be limited by the size of the vacuum cell in which the measurement takes place. The best performance was obtained using cold atoms launched along a parabolic trajectory of about 1 m [2]. This constraint limits the development of compact and transportable atomic gravimeters necessary to high-precision geophysical on-site measurements. Furthermore, the value of the gravity is averaged over a large height.

Atom gradiometers stemming from free-fall gravimeters are constrained to shorter measurement times. Some of these gradiometers are used to measure the Newtonian gravity constant [12,13]. As related in these references, the largest contribution to the error budget comes from the uncertainty on the atomic cloud position within the fountain and the initial launch velocity of the atoms. To improve the measurement of the  $G$  constant, there is a need for a conceptually different gravimeter capable of locally measuring gravity at a well-controlled position.

Several methods were proposed to implement a compact atomic gravimeter. They consist in levitating the atoms by means of the laser light [14–20]. Currently three kinds of experiments based on atoms trapped in a vertical optical lattice are in progress [17–20]: using atoms confined in an amplitude-modulated vertical optical lattice [17], using atom interferometry involving a coherent superposition between different Wannier-Stark atomic states in a one-dimensional (1-D) optical lattice [20], and combining a Ramsey-Bordé interferometer with Bloch oscillations in a quasistationary vertical standing wave [18,19]. In the last experiment atoms interact with the optical lattice in the middle of the interferometer sequence during about 100 ms. They reach the short-term sensitivity of  $3.5 \times 10^{-6} g$  at 1 s. This sensitivity is limited

by a contrast decay of the interference fringes due to the decoherence induced by the inhomogeneity of the lattice laser beams [19].

In this paper we demonstrate a method to measure precisely the local acceleration of gravity. The principle is illustrated in Fig. 1. It is based on a Ramsey-Bordé atom interferometer realized by two pairs of  $\pi/2$  Raman pulses. In order to compensate the fall of atoms between the pulses, we use a sequence of brief and strong accelerations. The acceleration is based on the method of Bloch oscillations in an accelerated optical lattice. Because the lattice is pulsed we have less decoherence compared to previously described methods where the force is applied continuously.

We obtain a preliminary measurement of the local gravity acceleration with a short-term sensitivity of  $7.4 \times 10^{-7}$  at 1 s. The atoms are maintained within a 4.6-mm falling distance during about 230 ms. Using similar acceleration pulses, it is possible to control precisely the position and the initial velocity of the atoms before the beginning of the atom interferometer.

The principle of the acceleration process consists in transferring to the atoms many photon recoils by the means of Bloch oscillations (BO) [21–23]. This is done by a succession of Raman transitions in which the atom begins and ends in the same energy level, so that its internal state is unchanged while its velocity has increased by  $2v_r$  after each transition ( $v_r = \hbar k/m$  is the recoil velocity of the atom of mass  $m$  when it absorbs a photon of momentum  $\hbar k$ ). BO are produced in a one-dimensional vertical optical lattice which is accelerated by linearly sweeping the relative frequencies of the two counterpropagating laser beams. This leads to a succession of rapid adiabatic passages between momentum states differing by  $2\hbar k$ . The Bloch oscillation technique offers a remarkable ability to coherently and efficiently transfer photon momenta [24].

In Ref. [19], the configuration of Bloch oscillations in a vertical standing wave has been investigated. The authors have observed a drop of the contrast when the number of Bloch oscillations is increased, limiting this number to 75 (corresponding to 100 ms). This result differs from what was observed in accelerated lattices where a contrast of 30% is observed for 600 BO performed in 4 ms [25]. The contrast decay is due to the speckle pattern, which induces a random force on the atoms. Indeed this force is proportional to the depth  $U_0$  of the optical lattice. The phase imprinted by the

\*guellati@spectro.jussieu.fr

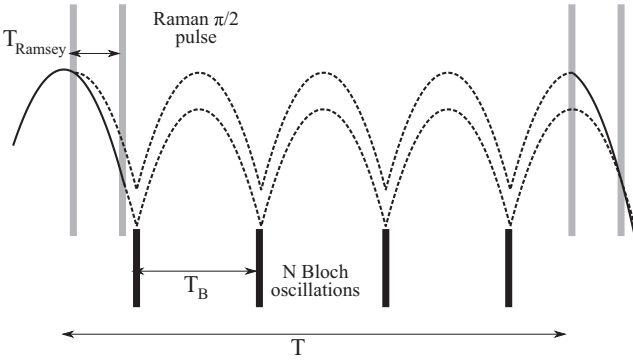


FIG. 1. Principle of the method. We use laser-cooled  $^{87}\text{Rb}$  atoms in  $F = 2$ . They are first prepared with an initial velocity close to zero (trajectory in solid curve); we apply a first pair of  $\pi/2$  pulses to select atoms in  $F = 1$  (dashed curve). A laser beam resonant with the  $D_2$  line pushes away atoms remaining in state  $F = 2$  (those trajectories are not shown in this figure). Then we pulse and accelerate the optical lattice to hold the atoms in  $F = 1$  against gravity, in the middle of the atom interferometer sequence.

speckle is proportional to the lattice depth times its duration. However, the critical acceleration which sets the efficiency of Bloch oscillation scales as  $U_0^2$  (adiabaticity criterion), in the weak binding limit [21,22]. In our experiment the depth of the lattice is 10 times as high as in the experiment using a standing wave, whereas the light is switched on for a duration 50 times shorter. The decoherence due to the inhomogeneities of the Bloch laser beams is therefore lower using a sequence of brief and strong accelerations from BO.

We use a Ramsey-Bordé atom interferometer realized by two pairs of  $\pi/2$  laser pulses. Each light pulse induces a Doppler-sensitive Raman transition which couples the hyperfine levels  $F = 1$  and  $F = 2$  of the  $^5S_{1/2}$  ground state of  $^{87}\text{Rb}$ . The first pair of  $\pi/2$  pulses transfers the atoms from the  $F = 2$  hyperfine level to  $F = 1$  and selects the initial velocity distribution. The second pair measures the final velocity of the atoms by transferring resonant atoms from  $F = 1$  to  $F = 2$ . Note that after the first pair of  $\pi/2$  pulses we apply a laser pulse resonant with the  $D_2$  line in order to push away atoms remaining in the state  $F = 2$ . Atoms in  $F = 1$  perform  $M$  series of  $N$  Bloch oscillations between the two pairs of  $\pi/2$  pulses: After the first pair we let the atoms fall during  $T_B$ , and then they are shone with the accelerated optical lattice. They acquire a velocity of  $2N \times v_r$  in the upward direction. The delay  $T_B$  is chosen in such a way that the gravity acceleration is perfectly compensated by the coherent acceleration due to Bloch oscillations, i.e.,  $T_B = 2N v_r / g$ . This process is repeated periodically to maintain the atoms against gravity. Figure 1 depicts only the trajectories of atoms in  $F = 1$  after the first pair of  $\pi/2$  pulses.

To maintain the atoms within a short falling distance, it is necessary to prepare them with an initial velocity close to zero. For this purpose, the atom interferometer sequence is preceded by the *atomic elevator* sequence [25] (see Fig. 2). It consists of two sets  $N_1$  and  $N_2$  of BO: Atoms are first accelerated in a given direction using  $N_1$  BO. When they reach the chosen position, they are stopped by using  $N_2$  BO in the opposite direction. The final position of the atoms and

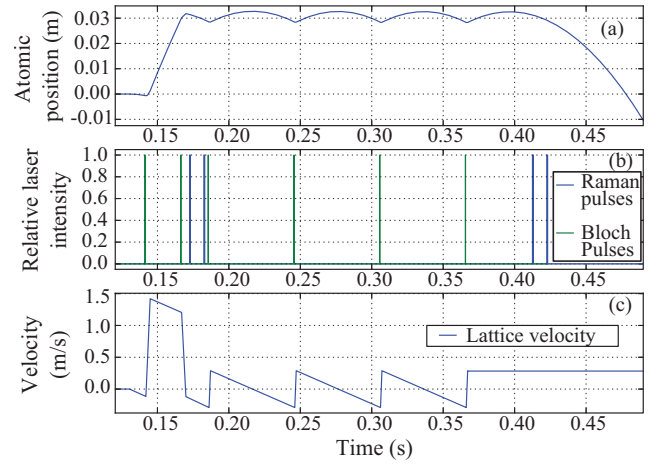


FIG. 2. (Color online) (a) Trajectory of the atoms during the measurement procedure. The atoms are first held at a given position using an atomic elevator. We apply the first pair of  $\pi/2$  Raman pulses, and then atoms are maintained against gravity for 230 ms by periodically transferring to them 100 photon momenta. (b) Timing sequence of the Raman and Bloch beams; the two first Bloch pulses are used to perform the atomic elevator. (c) Velocity of the optical lattice vs time.

their velocity are precisely determined by the numbers  $N_1$  and  $N_2$  and the spacing time between the two Bloch pulses. This method allows us to displace the atoms, without losses, at different positions in the vacuum chamber, before starting the measurement of the local gravity.

The experiment is realized in a titanium UHV chamber connected to a glass cell by a differential pumping tube. It is shielded from residual magnetic fields by two layers of  $\mu$ -metal. The two-dimensional magneto-optical trap (2D-MOT) produces a slow  $^{87}\text{Rb}$  atomic beam (about  $10^9$  atoms/s at a velocity of 20 m/s) which loads during 250 ms a three-dimensional magneto-optical trap. Then a  $\sigma^+ - \sigma^-$  molasses generates a cloud of about  $2 \times 10^8$  atoms in the  $F = 2$  hyperfine level, with a 1.7-mm radius and at a temperature of 4  $\mu\text{K}$ .

The Bloch beams originate from a 3.8-W Ti:sapphire laser pumped by an 18-W@532-nm laser (Verdi G18-Coherent). The output laser beam is split into two paths, each of which passes through an acousto-optic modulator (AOM) to adjust the frequency offset and amplitude before being injected into a polarization-maintaining fiber. The depth of the generated optical lattice is  $21E_r$  (for  $^{87}\text{Rb}$  the recoil energy is  $E_r \simeq 3.77 \text{ kHz} \times h$ , where  $h$  is the Planck constant) for an effective power of 220 mW seen by the atoms. The Bloch lasers are blue detuned by 30 GHz from the rubidium  $D_2$  line. Under these conditions, the Landau-Zener tunneling and the scattering rate are negligible. The Bloch pulses are shaped by controlling the radio-frequency signal driving the AOMs. The power lattice is raised on in 500  $\mu\text{s}$ , in order to adiabatically load the atoms in the first Brillouin zone. The number of Bloch oscillations is determined by fixing the frequency chirp of the rf signal used to drive the AOMs. The Raman and Bloch beams are collimated to a  $1/e^2$  diameter of 11 mm at the output of the polarization-maintaining fibers used to guide light toward the vacuum chamber (for details of the optical setup,

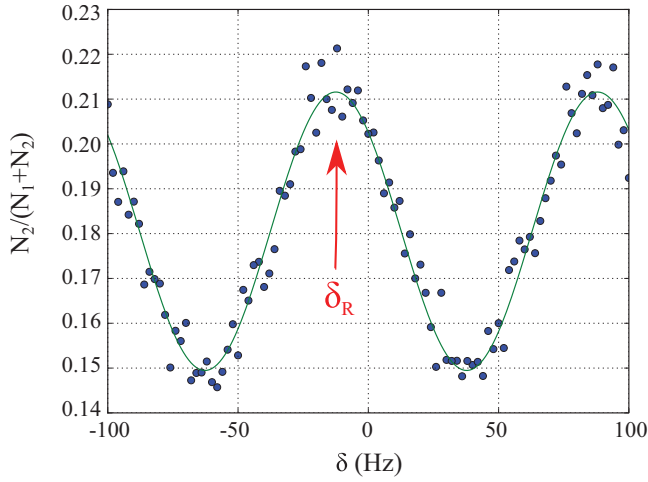


FIG. 3. (Color online) Typical spectrum used to deduce a value of  $g$ . The data points show the quantity  $N_2/(N_1 + N_2)$ , where  $N_1$  and  $N_2$  are the populations in the  $F = 1$  and  $F = 2$  levels, measured for different values of  $\delta$ , the change of the Raman frequency between the two pairs of  $\pi/2$  pulses. The solid line is a least-squares fit to the data by a  $\cos[(\delta - \delta_R) \times T_R]$  function. The position  $\delta_R$  of the central fringe is determined from this fit.

see Refs. [25,26]). The timing sequence of Raman and Bloch pulses during the experiment is presented in Fig. 2(b). The delay  $T_R$  between two  $\pi/2$  pulses is 10 ms, and the duration of each pulse  $\tau$  equals 650  $\mu$ s. Figure 2(c) shows the velocity of the optical lattice as a function of time.

A way to determine the value of  $g$  would consist in scanning the value of the delay  $T$  between the two pairs of  $\pi/2$  pulses, keeping the relative Raman frequency  $\delta$  unchanged. If the delay  $T$  equals exactly  $2NM \times v_r/g$ , the BO will compensate exactly for the acceleration due to gravity and the two paths of the interferometer will be in phase. In the experiment we set the value of  $T$  close but not exactly equal to the expected value. The remaining velocity  $\delta v$  will induce a shift  $\delta_R = (k_1 + k_2) \times \delta v$  of the position of the fringes when we scan  $\delta$ . A typical interference fringe obtained with  $N = 50$ ,  $M = 4$ , and  $T = 227$  ms is shown in Fig. 3. The data points show the relative population in  $F = 2$  measured by the second pair of  $\pi/2$  pulses as the Raman frequency  $\delta$  is scanned. The fringe shift  $\delta_R$  is determined by a least-squares fit of the experimental data by a  $\cos[(\delta - \delta_R) \times T_R]$  function. In practice, we operate the interferometer close to the central fringe, which is previously located by using different values of  $T_R$ .

The frequency shift  $\delta_R$  is related to the local gravity acceleration by

$$g = \frac{1}{T} \times \left( \frac{2NM\hbar k_B}{m_{Rb}} - \frac{\delta_R}{(k_1 + k_2)} \right), \quad (1)$$

where  $k_B$  is the Bloch wave vector and  $k_1$  and  $k_2$  are the wave vectors of the two Raman beams. The ratio  $\hbar/m_{Rb}$  between the Planck constant and the rubidium atomic mass  $m_{Rb}$  is measured by our group with a relative uncertainty of  $1.2 \times 10^{-9}$  [26]. In Eq. (1), the term  $\delta_R/(k_1 + k_2)$  is small and appears as a correction to the reference value  $g_{ref} = 2NMv_r/T$ . As a consequence, to achieve a precise determination of  $g$ , the

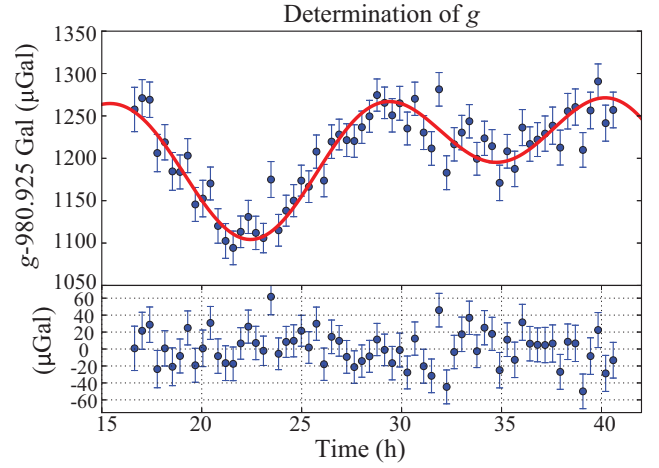


FIG. 4. (Color online) Gravity data taken over one day fitted by the earth tide model. Each data point is deduced from the average over six measurements. The lower curve shows residuals of the fit ( $1 \mu\text{Gal} = 10^{-8} \text{ m/s}^2$ ).

precision on the value of the Raman wave vectors ( $k_1$  and  $k_2$ ) is less critical than on the value of the Bloch wave vector.

As the fall distance is small, the systematic errors due to the gradients of residual magnetic fields and light fields are negligible. In practice, to cancel the parasitic effect due to the temporal fluctuations of these fields, we record two spectra exchanging the direction of the Raman beams. We achieve a relative statistical uncertainty of  $4.8 \times 10^{-8}$  on the value of  $g$  for an integration time of 4 min. Figure 4 shows a temporal behavior of the gravity measured over 25 h. These data fit well with a local solid Earth tide model [27,28], and the temporal fluctuations of local gravity are dominated by tidal forces.

The sensitivity of the gravimeters is characterized by the Allan standard deviation of the  $g$  measurement. Figure 5 shows the Allan standard deviation of the set of 388 determinations

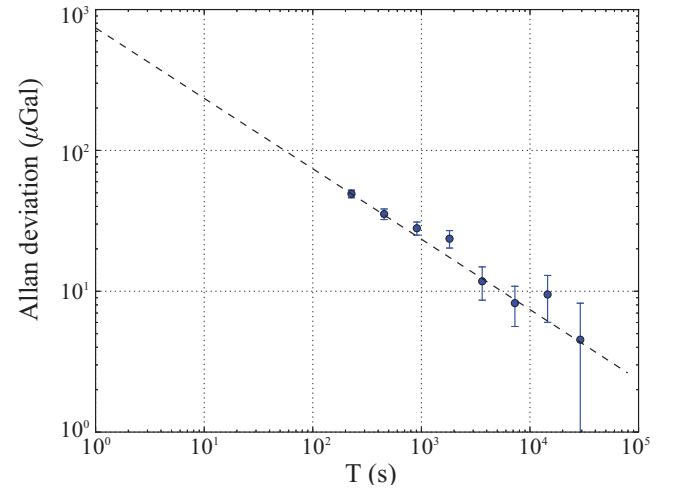


FIG. 5. (Color online) Allan standard deviation of the local gravity, for a delay  $T = 227$  ms and a number of BO  $N = 50$  ( $1 \mu\text{Gal} = 10^{-8} \text{ m/s}^2$ ).

of  $g$ ; it scales as  $t^{-1/2}$  (where  $t$  is measurement time). The short-term sensitivity, extrapolated to 1 s according to the white noise behavior, is  $7.4 \times 10^{-7}g$ .

Thanks to the “atomic elevator” sequence, which precedes the measurement of  $g$ , it is possible to change the position at which gravity is measured. Because we use BO in the elevator, the acceleration of atoms is well known and it is possible to precisely calculate the displacement of the cloud, using the numbers  $N_1$  and  $N_2$  of BO and the duration of the elevator. Our setup can therefore be used to precisely measure the gravity gradient. However, the sensitivity on  $g$  is not high enough to map the gravity gradient, whose order of magnitude is  $\sim 310 \mu\text{Gal/m}$  ( $1 \mu\text{Gal} = 10^{-8} \text{ m/s}^2$ ).

In this work we have focused on the sensitivity of this method. The systematic errors which affect the value of  $g$  are similar to the ones identified in usual gravimeters (Gouy phase, wavefront aberrations, Coriolis force, level shifts, etc.) [2,11,29]. They should be investigated and presented in an upcoming article.

In this paper we have demonstrated a method to locally measure the gravitational acceleration. It is based on a Ramsey-Bordé interferometer and a sequence of Bloch oscillations. We obtain a preliminary sensitivity of  $7.4 \times 10^{-7}$  at 1 s. This sensitivity can be improved using a colder atomic source (100 nK) and by reducing the vibrations to achieve a delay  $T_R$  of about 50 ms. With these experimental parameters we should achieve a sensitivity comparable to the state of the art. The key feature of our method lies in the decoherence induced by the fluctuations of the optical lattice, which is substantially reduced compared to similar methods.

We notice that in our atomic interferometer the frequencies of the Raman beams are the same during the first and the second pairs of  $\pi/2$  pulses. We can imagine implementing a succession of atom interferometers where the last pair of  $\pi/2$  pulses of each interferometer is the first pair of the

next one. In such a configuration the phase noise between successive interferometers will be correlated and the Allan variance should decrease as  $1/n$  (where  $n$  is the number of measurements).

We have elaborated a timing sequence, which allows us to move the atoms toward different positions in the vacuum chamber before performing the local gravity measurement. Potential applications of this method to improve the measurement of the Newtonian gravitational constant  $G$  should be investigated. In the experiment reported in Ref. [12], the constant  $G$  is determined using a gradiometer, which measures the differential acceleration of two samples of laser-cooled atoms. The change in the gravitational field along one dimension is measured when a test mass is displaced along a distance of 27.940 cm. The main systematic errors come from the uncertainties on the position and the initial velocity of the atoms. More recently the experiment of Tino *et al.* [13] improved the uncertainty on  $G$  by one order of magnitude. The main contribution to the systematic error on the  $G$  measurement derives from the initial velocity of the atomic cloud and the positioning accuracy of the source masses. The authors claimed that the latter should be reduced by about one order of magnitude by using a laser tracker. We propose to investigate the method described in this paper to reduce the systematic error due to atomic cloud parameters.

This experiment is supported in part by IFRAF (Institut Francilien de Recherches sur les Atomes Froids), the Agence Nationale pour la Recherche, FISCOM Project No. ANR-06-BLAN-0192, the Direction Générale de l’armement (DGA), and “Emergence” Program of the University Pierre et Marie Curie. We thank Alexandre Bresson, Nassim Zahzam, Malo Cadoret, and Yannick Bidet for providing us with a tide model using the internal ONERA software based on the Tamura-Wenzel model.

- 
- [1] M. Kasevich and S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 181 (1991).
  - [2] A. Peters, K. Chung, and S. Chu, *Metrologia* **38**, 25 (2001).
  - [3] T. L. Gustavson, A. Landragin, and M. A. Kasevich, *Classical Quantum Gravity* **17**, 2385 (2000).
  - [4] J. Le Gouët, T. E. Mehlstäubler, J. Kim, S. Merlet, A. Clairon, A. Landragin, and F. Pereira Dos Santos, *Appl. Phys. B* **92**, 133 (2008).
  - [5] A. Gauguier, B. Canuel, T. Lévêque, W. Chaibi, and A. Landragin, *Phys. Rev. A* **80**, 063604 (2009).
  - [6] M. Schmidt, A. Senger, M. Hauth, C. Freier, V. Schkolnik, and A. Peters, *Gyroscopy Navigation* **2**, 170 (2011).
  - [7] J. K. Stockton, K. Takase, and M. A. Kasevich, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 133001 (2011).
  - [8] G. Tackmann, P. Berg, C. Schubert, S. Abend, M. Gilowski, W. Ertmer, and E. M. Rasel, *New J. Phys.* **14**, 015002 (2012).
  - [9] P. A. Altin *et al.*, *New J. Phys.* **15**, 023009 (2013).
  - [10] H. Müller, S.-W. Chiow, S. Herrmann, S. Chu, and K.-Y. Chung, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 031101 (2008).
  - [11] A. Louchet-Chauvet, T. Farah, Q. Bodart, A. Clairon, A. Landragin, S. Merlet, and F. P. D. Santos, *New J. Phys.* **13**, 065025 (2011).
  - [12] J. B. Fixler, G. T. Foster, J. M. McGuirk, and M. A. Kasevich, *Science* **315**, 74 (2007).
  - [13] G. Lamporesi, A. Bertoldi, L. Cacciapuoti, M. Prevedelli, and G. M. Tino, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 050801 (2008).
  - [14] F. Impens, F. Bouyer, and C. J. Bordé, *Appl. Phys. B* **84**, 603 (2006).
  - [15] K. J. Hughes, J. H. T. Burke, and C. A. Sackett, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 150403 (2009).
  - [16] M. R. De Saint-Vincent, J. P. Brantut, C. J. Bordé, A. Aspect, T. Bourdel, and P. Bouyer, *Europhys. Lett.* **89**, 10002 (2010).
  - [17] N. Poli, F.-Y. Wang, M. G. Tarallo, A. Alberti, M. Prevedelli, and G. M. Tino, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 038501 (2011).
  - [18] P. Cladé, S. Guellati-Khlifa, C. Schwob, F. Nez, L. Julien, and F. Biraben, *Europhys. Lett.* **71**, 730 (2005).
  - [19] R. Charrière, M. Cadoret, N. Zahzam, Y. Bidet, and A. Bresson, *Phys. Rev. A* **85**, 013639 (2012).
  - [20] B. Pelle, A. Hilico, G. Tackmann, Q. Beaufils, and F. Pereira dos Santos, *Phys. Rev. A* **87**, 023601 (2013).
  - [21] E. Peik, M. Ben Dahan, I. Bouchoule, Y. Castin, and C. Salomon, *Phys. Rev. A* **55**, 2989 (1997).

- [22] M. Ben Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4508 (1996).
- [23] S. R. Wilkinson, C. F. Bharucha, K. W. Madison, Q. Niu, and M. G. Raizen, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4512 (1996).
- [24] R. Battesti, P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, B. Grémaud, F. Nez, L. Julien, and F. Biraben, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 253001 (2004).
- [25] M. Cadoret, E. de Mirandes, P. Cladé, S. Guellati-Khelifa, C. Schwob, F. Nez, L. Julien, and F. Biraben, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 230801 (2008).
- [26] R. Bouchendira, P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, F. Nez, and F. Biraben, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 080801 (2011).
- [27] H. G. Wenzel, in *Proceedings of the Twelfth International Symposium on Earth Tides* (Science Press, Beijing, New York, 1995), pp. 235.
- [28] Y. Tamura, Bulletin d'Informations Marées Terrestres, Bruxelles **99**, 6813 (1987).
- [29] P. Cladé, E. de Mirandes, M. Cadoret, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, F. Nez, L. Julien, and F. Biraben, *Phys. Rev. A* **74**, 052109 (2006).





# Phase shift due to atom-atom interactions in a light-pulse atom interferometer

Raphaël Jannin,<sup>1</sup> Pierre Cladé,<sup>1</sup> and Saïda Guellati-Khélifa<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup>*Laboratoire Kastler Brossel, UPMC-Sorbonne Universités, CNRS, ENS-PSL Research University, Collège de France, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France*

<sup>2</sup>*Conservatoire National des Arts et Métiers, 292 rue Saint Martin, 75003 Paris, France*

(Received 24 April 2015; published 13 July 2015)

We present a theoretical model allowing precise calculation of the phase shift induced by atom-atom interactions in a light-pulse atom interferometer based on two-photon Raman atom optics. This model is in good agreement with numerical simulations based on solving the Gross-Pitaevskii equation. The atom interferometer exhibits an atom-atom-interaction-induced phase shift when there is asymmetry between the two arms of the interferometer. In the case of a Ramsey-Bordé atom interferometer ( $\{\pi/2-\pi/2\}-\{\pi/2-\pi/2\}$  pulse configuration), the asymmetry comes from the fact that the number of atoms in each arm of the interferometer is not constant. In the case of a Mach-Zehnder ( $\{\pi/2-\pi-\pi/2\}$  pulse sequence), if the pulses are perfect, the number of atoms is constant in the interferometer. We study the effect due to imperfections of the light pulses as well as the effect due to the expansion of the cloud. Our model leads to precise and simple formulas of the mean-field phase shift as a function of the experimental parameters.

DOI: [10.1103/PhysRevA.92.013616](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.92.013616)

PACS number(s): 37.25.+k, 67.85.Hj, 67.85.Jk, 03.75.Dg

## I. INTRODUCTION

Nowadays atom interferometers offer new prospects for testing fundamental physics in the laboratory and in space [1–3]: the equivalence principle, general relativity, gravitational wave detection, and quantum electrodynamics. The challenge is to push the sensitivity and the accuracy of atom interferometers beyond the state of the art in high-precision measurements of gravity and inertial effects [4–8], the Newtonian gravitational constant [9,10], and the fine structure constant [11,12]. For a few years, new experimental approaches have been proposed to build high-sensitivity and low-systematics atom interferometers: large momentum beam-splitters based on Bloch oscillations or Bragg diffraction [13–16], new detection strategies [3,17], and development of high-power laser sources [18,19]. In this regard, Bose-Einstein condensates (BECs) seem the ideal atomic source, combining high brightness with narrow spatial and momentum spread. However the drawback is the atom-atom interactions which give rise to density-dependent mean-field shifts in the atomic interferometer.

In this paper we investigate the phase shift induced by atom-atom interactions in a light-pulse atom interferometer. We present a theoretical model and a numerical simulation based on the Gross-Pitaevskii equation (GPE) to calculate precisely the mean-field phase shifts during both the interaction with light pulses and the free propagation of the atomic wave packet. We then calculate the phase shift accumulated during the atom interferometer considering two configurations of the Raman light pulse sequence:  $\{\pi/2-\pi/2\}-\{\pi/2-\pi/2\}$  (Ramsey-Bordé) and  $\{\pi/2-\pi-\pi/2\}$  (Mach-Zehnder).

Each light pulse induces a Raman transition which couples two hyperfine states ( $5^2S_{1/2}F=1$  and  $F=2$ ) of the  $^{87}\text{Rb}$  atom under study in this paper. The result of this transition is also that the atoms acquire a velocity  $2v_r$ ,  $v_r$  being the one-photon recoil velocity. Between these light pulses, the atom

wave packets are free to propagate. Each cloud is subject to two nonlinear terms: the first one accounting for the interactions between its own atoms, which are called self-interactions; and the second one corresponding to the interactions with atoms from the other cloud, which we call mutual interactions.

The evolution of a BEC, in the mean-field approximation, is described by the GPE, which adds to the Schrödinger equation a nonlinear term accounting for the interactions between atoms and dependent on the density of the gas.

In this paper we calculate the effect due to the interactions for high-precision measurements. We consider only the limit where the nonlinear term is a perturbation to the Schrödinger equation and only induces phase shifts on the atomic wave packet. This is the case if the mean field due to atom-atom interactions at the center of the cloud is smaller than the characteristic energies of the system. For example, a  $10^5$ -atom cloud with a typical size of  $100\text{ }\mu\text{m}$  has a mean field of 1 Hz. This value is much smaller than the kinetic energy (about 520 Hz for a 50-nK atomic cloud). However, the phase shift induced by such a mean field on an atom interferometer with a 100-ms time scale is of the order of 50 mrad for each arm. This is much higher than the accuracy achieved in high-precision measurements.

We consider a three-dimensional (3D) atom cloud with a Gaussian shape. We assume that the transverse and longitudinal motions are uncoupled. This is justified by the facts that the interferometer affects only the longitudinal motion and that interactions are weak. We suppose that the transverse shape of the atomic cloud stays Gaussian with a width  $w_\perp$ . We can therefore integrate the GP equation over the transverse directions, giving rise to the 1D GPE:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2} + V_i(\mathbf{x}, t) \Psi_i + \sum_j N g_{ij} |\Psi_j|^2 \Psi_i, \quad (1)$$

in which  $N$  is the total number of atoms,  $V_i(\mathbf{x}, t)$  represents any external potential applied to the cloud  $i$ , and the  $g_{ij}$  correspond to the interaction constants between species  $i$  and species  $j$ ,

\* guellati@spectro.jussieu.fr

given by

$$g_{ij} = \frac{2\hbar^2 a_{ij}}{mw_{\perp}^2}, \quad (2)$$

$a_{ij}$  being the  $s$ -wave scattering length between the  $i$  and the  $j$  states. The interaction coefficient  $g_{ij}$  may depend on time because the width  $w_{\perp}$  increases.

In our analytical model, the wave function of the atom cloud in state  $i$  is approximated with the following ansatz:

$$\Phi_i(x, t) = c_i(t) \sqrt{\rho_i(x, t)}, \quad (3)$$

where the Gaussian envelope of wave packet  $i$  is given by

$$\rho_i(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2}} \exp\left(-\frac{2(x - x_i(t))^2}{w^2}\right), \quad (4)$$

normalized in such a way that  $\int dx \rho_i(x, t) = 1$ , where  $w$  is the spatial extension of the cloud and  $x_i(t)$  its position at time  $t$ .

## II. EFFECT OF INTERACTIONS DURING RAMAN PULSES

Two hyperfine levels (denoted  $|1\rangle$  and  $|2\rangle$ ) are coupled by a two-photon Raman transition induced by two counter-propagating laser beams. We note  $\Omega$  the effective Rabi frequency of the transition and  $\delta$  the two-photon detuning (Doppler effect). The interaction-free Hamiltonian  $H_0$  can be written as

$$H_0 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \Omega/2 \\ \Omega/2 & \delta \end{pmatrix}. \quad (5)$$

In our model, the phase shift induced by a wave packet in state  $j$  on another one in state  $i$  results from the average of the mean field,

$$V_{j \rightarrow i}(t) = Ng_{ij} \int |\Phi_j(x, t)|^2 \rho_i(x, t) dx, \quad (6)$$

which can be written, using expression (3), as

$$V_{j \rightarrow i}(t) = |c_j(t)|^2 \hbar \omega_{ij} D_{ij}(t), \quad (7)$$

in which we have defined the average mean-field pulsation  $\omega_{ij}$ , given by

$$\omega_{ij} = \frac{Ng_{ij}}{\hbar \sqrt{\pi} w}, \quad (8)$$

and the overlap function  $D_{ij}(t)$ , defined as

$$D_{ij}(t) = \sqrt{\pi} w \int \rho_i(x, t) \rho_j(x, t) dx, \quad (9)$$

yielding

$$D_{ij}(t) = \exp\left(-\frac{(x_j(t) - x_i(t))^2}{w^2}\right). \quad (10)$$

The interactions lead to an effective potential  $V(t)$ , which can be written as the sum of self and mutual interactions for each state,

$$V(t) = \begin{pmatrix} V_{1 \rightarrow 1}(t) + V_{2 \rightarrow 1}(t) & 0 \\ 0 & V_{2 \rightarrow 2}(t) + V_{1 \rightarrow 2}(t) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

using the expressions for  $V_{j \rightarrow i}(t)$  defined by (7).

The Raman transition changes the momentum of the atom by  $2\hbar k$  (where  $k = k_1 \simeq k_2$ ,  $k_i$  being the wave vectors of the Raman beams). The recoil endured is small enough to leave the atom-atom interaction unchanged. In this way we can still use the  $s$ -wave scattering length  $a_{ij}$ .

We assume that the potential is weak compared to the Raman coupling ( $\omega_{ij} \ll \Omega$ ). It is then possible to treat this situation as a time-dependent perturbation problem, with the total Hamiltonian  $H(t) = H_0 + V(t)$ .

The evolution operator is written

$$U(t) = U_0(t) + \delta U(t), \quad (12)$$

where  $U_0$  is the evolution operator associated with the unperturbed Hamiltonian  $H_0$ . The perturbation on the time evolution operator,  $\delta U$ , is a solution of the equation

$$\frac{d\delta U}{dt} = -\frac{i}{\hbar}(VU_0 + H_0\delta U), \quad (13)$$

(where  $i^2 = -1$ ), which is given at first order by [20]

$$\delta U(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau U_0(t - \tau) V(\tau) U_0(\tau). \quad (14)$$

In order to calculate  $\delta U(t)$ , we need to calculate  $V(t)$ , which is obtained from the unperturbed state  $|\Phi(t)\rangle = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle$ . From the initial wave function  $|\Phi(0)\rangle$ ,

$$|\Phi(0)\rangle = a_1|1\rangle + a_2 e^{i\varphi}|2\rangle, \quad (15)$$

we obtain

$$|c_1(t)|^2 = a_1^2 \cos^2(\Omega t/2) + a_2^2 \sin^2(\Omega t/2) + 2a_1 a_2 \sin \varphi \cos(\Omega t/2) \sin(\Omega t/2), \quad (16)$$

$$|c_2(t)|^2 = a_1^2 \sin^2(\Omega t/2) + a_2^2 \cos^2(\Omega t/2) - 2a_1 a_2 \sin \varphi \cos(\Omega t/2) \sin(\Omega t/2), \quad (17)$$

corresponding to the solutions of the Schrödinger equation. Integrating expression (14) with the previous unperturbed solutions, one finds the expressions of the elements of  $\delta U$ , which take the form

$$\delta U_{ij}(t) = -i^{\delta_{ij}} \sum_{k,l} \frac{\omega_{kl}}{4\Omega} (a_1^2 F_{ijkl}(t) + a_2^2 G_{ijkl}(t) + 2a_1 a_2 \sin \varphi H_{ijkl}(t)), \quad (18)$$

where the expressions of the functions  $F_{ijkl}(t)$ ,  $G_{ijkl}(t)$ , and  $H_{ijkl}(t)$  are given in the Appendix. If we take these expressions after a  $\pi/2$  pulse [i.e., for the time  $\tau = \pi/(2\Omega)$ ] and for an initial state  $|1\rangle$ , we obtain the following coefficients, which can also be used for the case where the system is initially in  $|2\rangle$  by performing circular permutations as explained in the Appendix:

$$\delta U_{11}(\tau) = \frac{i}{4\Omega} (-4.14\omega_{11} + 0.1\omega_{22} - 0.4\omega_{12}), \quad (19)$$

$$\delta U_{12}(\tau) = \frac{1}{4\Omega} (-1.61\omega_{11} - 0.4\omega_{22} - 2.62\omega_{12}), \quad (20)$$

$$\delta U_{21}(\tau) = \frac{1}{4\Omega} (-2.02\omega_{11} - 0.6\omega_{22} - 1.82\omega_{12}), \quad (21)$$

$$\delta U_{22}(\tau) = \frac{i}{4\Omega} (0.5\omega_{11} - 0.91\omega_{22} - 4.74\omega_{12}). \quad (22)$$

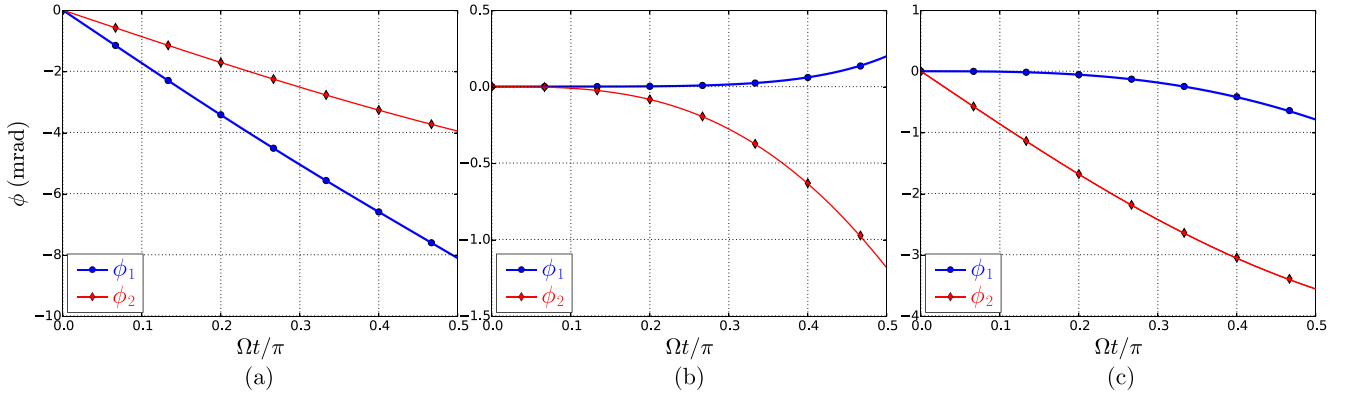


FIG. 1. (Color online) The phase  $\phi_i$  generated by interactions in state  $|1\rangle$  [(blue) circles] and state  $|2\rangle$  [(red) diamonds] plotted versus  $\Omega$ : contributions of the  $\omega_{ii}$  terms (a)  $\omega_{11}$ , (b)  $\omega_{22}$ , and (c)  $\omega_{12}$ , with the same initial state  $|1\rangle$  for all atoms. Solid lines are obtained using the formulas derived in the text, whereas symbols are the results of numerical resolution of the two-component coupled GPE.

The perturbation term  $\delta U$  of the evolution operator leads to a perturbation of each state  $i$  given by  $\sum_j \delta U_{ij} c_j(0)$ , which induces a phase shift  $\phi_i(t)$  and a change in the amplitude  $\epsilon_i(t)$  given by

$$(\epsilon_i(t) + i\phi_i(t))c_i(t) = \sum_j \delta U_{ij} c_j(0). \quad (23)$$

When the Raman pulse is used to split or recombine the atomic wave packets, only the phase shift is relevant and we focus only on this term. However, the last Raman pulse in the interferometer sequence recombines the interfering atomic wave packets, hence the phase shift induces a change in the number of atoms and the amplitude term should be considered for this pulse.

Figures 1 and 2 present the contributions of each interaction term  $\omega_{ij}$  to the phases of the two internal states, respectively, for an initial state  $|1\rangle$  and  $(|1\rangle + i|2\rangle)/\sqrt{2}$ , with a Rabi frequency  $\Omega/2\pi = 500$  Hz. The initial BEC is taken to have a spatial extension of  $30 \mu\text{m}$  and to be composed of  $N = 10^5$  atoms, with mean-field frequencies corresponding to  $\sim 3$  Hz. They are compared to the results found by numerically solving the coupled 1D GPEs. They show a good agreement between

our model and numerical results. Figure 2 exhibits a divergence of the phase, which can be explained as follows: the Raman pulse couples the two atomic states  $|1\rangle$  and  $|2\rangle$ . Without considering the atom-atom interaction, the coupling is described by Rabi oscillations, and the phase shift jumps to  $\pi$  when the amplitude probability is 0. However, if we take internal interactions into account, the amplitude probability does not vanish, leading to a continuous variation of the phase. Therefore, the phase shift induced only by atom-atom interactions exhibits a discontinuity of  $\pi$  when the amplitude probability passes through 0.

For  $^{87}\text{Rb}$  atoms, the values of the interaction constants  $g_{ij}$  are similar. If they were strictly identical, the two diagonal terms in the  $V$  matrix would be the same, and the phase shift  $\phi_i$  in both states would be identical. Because they differ by about 5%, we expect the phase difference  $\phi_1 - \phi_2$  between the two clouds to be about 20 times smaller than the phase shift of each cloud. Using the value given above for the Rabi frequency and mean-field frequencies, we obtain a phase shift of 0.075 mrad for a  $\pi/2$  pulse. Figure 3 shows the relative variation of the number of atoms due to internal interactions versus the Rabi frequency. This variation is of a few  $10^{-5}$ ; it can be neglected.

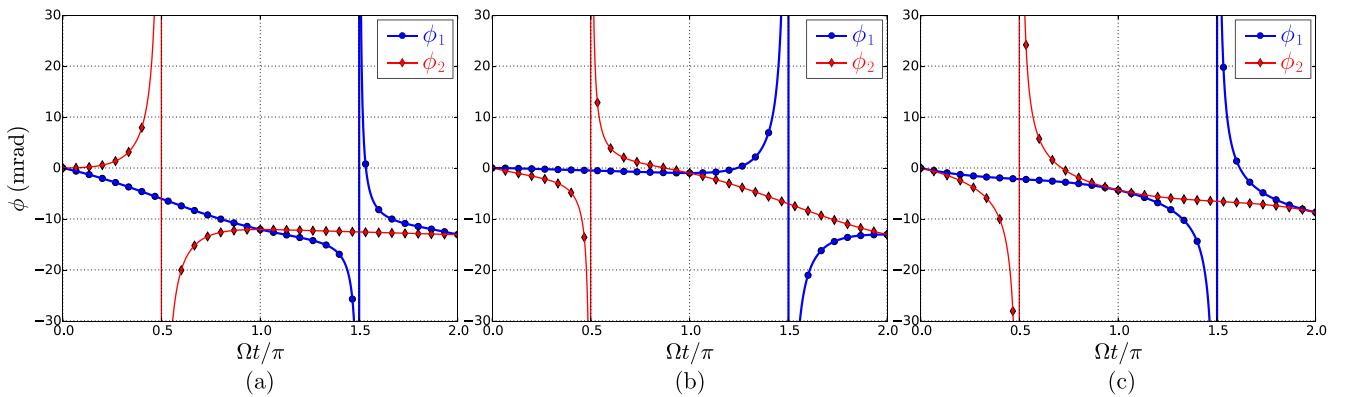


FIG. 2. (Color online) The phase  $\phi_i$  generated by interactions in state  $|1\rangle$  [(blue) circles] and state  $|2\rangle$  [(red) diamonds] plotted versus  $\Omega$ : contributions of the  $\omega_{ii}$  terms (a)  $\omega_{11}$ , (b)  $\omega_{22}$ , and (c)  $\omega_{12}$ , with the same initial state  $|1\rangle$   $(|1\rangle + i|2\rangle)/\sqrt{2}$  for all atoms. Solid lines are obtained using the formulas derived in the text, whereas symbols are the results of numerical resolution of the two-component coupled GPE.



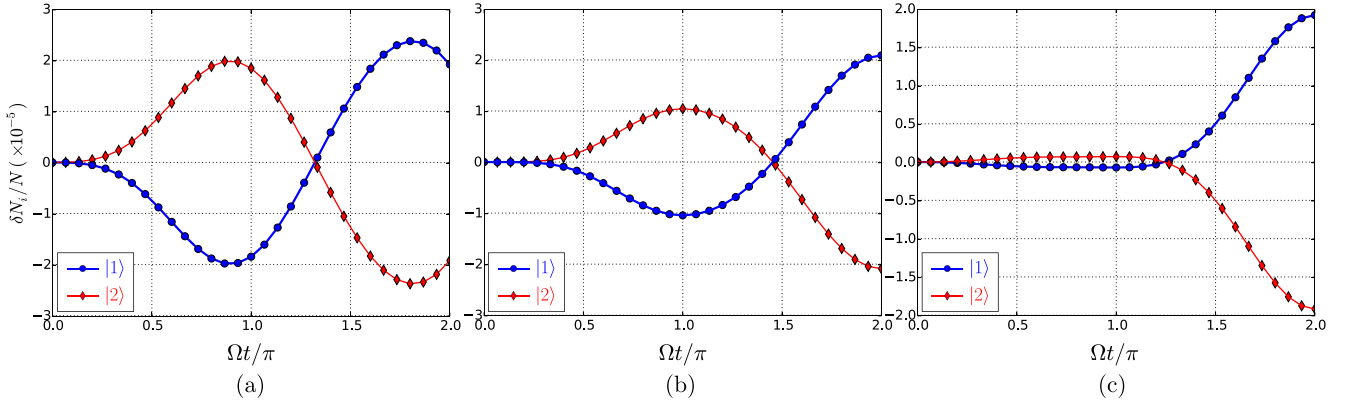


FIG. 3. (Color online) Variation of the number of atoms in state  $|1\rangle$  [(blue) circles] and state  $|2\rangle$  [(red) diamonds] induced by atom-atom interactions. The initial state is  $(|1\rangle + i|2\rangle)/\sqrt{2}$ . Contributions of the  $\omega_{ii}$  terms (a)  $\omega_{11}$ , (b)  $\omega_{22}$ , and (c)  $\omega_{12}$ . Solid lines are obtained using the formulas derived in the text, whereas symbols are the results of numerical resolution of the two-component coupled GPE.

### III. EFFECT OF INTERACTIONS DURING FREE EVOLUTION PHASES

During the free evolution phases, the two wave packets are not coupled by light and their number of atoms is constant. The phase shift due to atom-atom interactions can be expressed as the sum of the phase shift  $\phi^{\text{self}}$  due to self-interaction and the phase shift  $\phi^{\text{mutual}}$  due to mutual interaction.

The mutual interaction vanishes when the two clouds are separated, leading to a constant phase shift for long times. The self-interaction is constant and there is a linear variation of  $\phi^{\text{self}}$ .

Using (7) and (10), we obtain

$$\phi_i^{\text{self}}(t) = -|c_i|^2 \omega_{ii} t \quad (24)$$

and

$$\phi_i^{\text{mut}}(t) = -|c_j|^2 \omega_{ij} \frac{\sqrt{\pi} w}{4v_r} |\text{erf}(\Delta x(t)/w) - \text{erf}(\Delta x(0)/w)|, \quad (25)$$

where  $\Delta x = x_1 - x_2$  is the separation between the two arms at velocity  $\pm 2v_r$ .

In order to calculate the mutual phase shift after the first  $\pi/2$  pulse, we have to determine the mean positions of the two wave packets after this pulse. Because at time  $t = 0$ , we start with one wave packet, one could think that the separation  $\Delta x(\tau)$  at  $t = \tau$  is  $2v_r \tau$ . Numerical simulations obtained by fully integrating the GPE disagree with the results obtained from Eq. (25) using  $\Delta x = 2v_r \tau$ . This disagreement is solved by precisely calculating  $\Delta x$ .

For this purpose, consider an initial noninteracting Gaussian cloud in the ground state  $|1\rangle$  coupled with the excited state  $|2\rangle$  by two counter-propagating laser beams. The wave functions in the momentum space of the two levels can be determined using the expressions

$$\tilde{\Psi}_1(p, t) = \left( \cos(\Omega_{\text{eff}} t/2) + i \frac{\delta}{\Omega_{\text{eff}}} \sin(\Omega_{\text{eff}} t/2) \right) \times e^{-i\delta t/2} \tilde{\Psi}_1(p, 0), \quad (26)$$

$$\tilde{\Psi}_2(p + 2\hbar k, t) = -i \frac{\Omega}{\Omega_{\text{eff}}} \sin(\Omega_{\text{eff}} t/2) e^{-i\delta t/2} \tilde{\Psi}_1(p, 0), \quad (27)$$

where  $\delta = 2kp/m$  is the Doppler shift from the two-photon transition and  $\Omega_{\text{eff}} = \sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$  is the effective Rabi frequency. The phase of the cloud in state  $|1\rangle$ , taken at  $p \rightarrow 0$ , can be written as

$$\phi_1(p, t) = -\frac{\delta t}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{\delta}{\Omega_{\text{eff}}} \tan(\Omega_{\text{eff}} t/2)\right). \quad (28)$$

Its mean position is then given by

$$\langle X(t) \rangle_1 = -\hbar \frac{\partial \phi_1}{\partial p} \Big|_{p=0} = 2v_r \left[ \frac{t}{2} - \frac{1}{\Omega} \tan(\Omega t/2) \right]. \quad (29)$$

The mean position of the cloud in state  $|2\rangle$  is also given by  $\langle X(t) \rangle_2 = v_r t$ . Figure 4 shows the mean positions of each cloud as a function of time with Raman coupling, computed using the procedure described above and also using the results of a numerical simulation solving the coupled Schrödinger

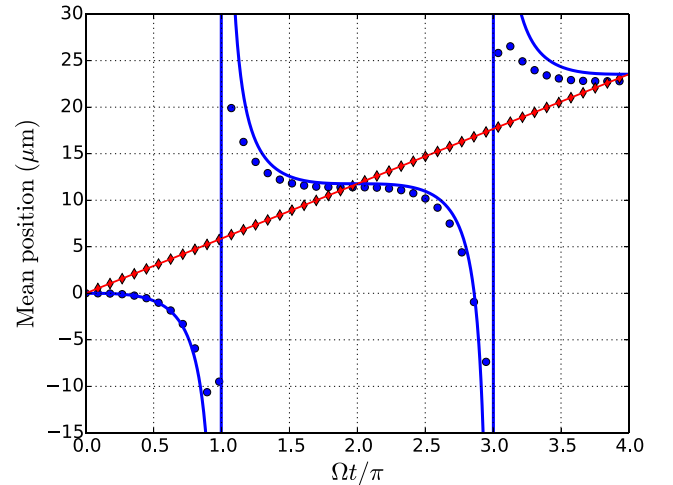


FIG. 4. (Color online) Mean positions of the two clouds plotted versus  $\Omega$  [(blue) circles for  $|1\rangle$  and (red) diamonds for  $|2\rangle$ ), during a Raman pulse, for  $10^5$  atoms initially in state  $|1\rangle$  forming a wave packet with a spatial extension  $w = 30 \mu\text{m}$ . No interaction is applied to the atoms. Numerical simulation results are represented as symbols, whereas results from the model described in the text correspond to solid curves.

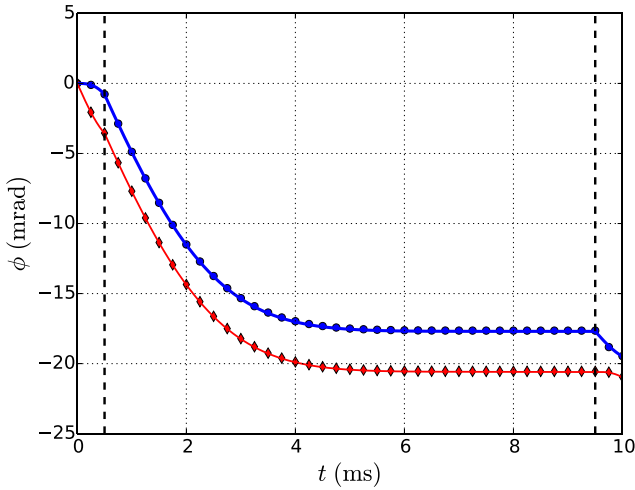


FIG. 5. (Color online) Evolution of the phases of the two clouds from paths A [(blue) circles] and B [(red) diamonds] during the first Ramsey interrogation, with  $N = 10^5$  atoms and  $\omega_{12} \simeq 2\pi \times 3$  Hz. Dashed vertical lines show the boundaries of the free propagation phase. Symbols are the results of a numerical resolution of the coupled GPE, and solid curves correspond to the results obtained with the model we develop in this paper.

equations. We observe that the cloud in state  $|1\rangle$  moves backward until it disappears when the  $\Omega t = \pi$  condition is reached. Afterwards it reappears ahead of the cloud in state  $|2\rangle$  and moves backward. When  $\Omega t = 2\pi$  the two clouds are in the same position.

Coming back to the determination of the mutual-interaction-induced phases during free propagation, the spatial separation between the clouds at the end of the Raman pulse is simply  $\Delta x = \langle X \rangle_2 - \langle X \rangle_1$ . For  $\Omega\tau = \pi/2$  we have

$$\Delta x = -\frac{4v_r\tau}{\pi}. \quad (30)$$

Figure 5 presents the mutual phases acquired by the two wave packets during the first Ramsey interrogation, with  $\omega_{12} \simeq 2\pi \times 3$  Hz. The numerical simulation fits very well with this model.

#### IV. PHASE SHIFT ACCUMULATED OVER THE RAMSEY-BORDÉ ATOM INTERFEROMETER

We use the expressions derived in the previous section for Raman interaction and free propagation to determine the phase during the whole sequence of the interferometer. A diagram showing the trajectory of the two paths defining the arms of the interferometer is presented in Fig. 6.

We consider that the times  $T$  and  $T'$  of free evolution separating the Raman pulses are long enough so that wave packets separate entirely during these phases. In this situation, each of the paths illustrated in Fig. 6 can be assumed to be independent. Thus, each Raman pulse will transfer a fraction  $\alpha$  of atoms from the initial state to the other one. The fraction of the initial total number of atoms in each cloud is also described in Fig. 6.

The whole sequence consists of two Ramsey interrogations, the selection and measurement, respectively, separated by a

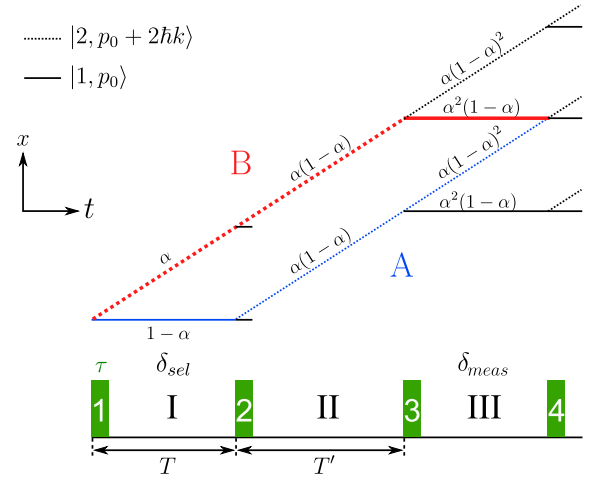


FIG. 6. (Color online) Trajectories of atom wave packets during the sequence of the interferometer. After each Raman pulse,  $\alpha N$  atoms are transferred to the other state. The two arms of the interferometer are defined by paths A [thin (blue) line] and B [thick (red) line]. The proportion of atoms in each cloud at each stage of the sequence is indicated. At the end of the second Raman pulse, the wave function of state  $|1\rangle$  is considered null, as all the atoms are assumed to be pushed away.

free propagation phase of duration  $T'$ . For each interrogation, the same detuning is applied to both Raman pulses. By sweeping the difference  $\delta = \delta_{\text{sel}} - \delta_{\text{meas}}$ , one obtains an interference fringe pattern [11]. If we consider that no potential except the mean field is applied to the wave packets, the position of the central fringe corresponds to the condition  $\delta = \Delta\phi/T$ , thus giving access to the total phase difference between the two arms.

In order to determine the phase accumulated in the two arms of the interferometer, we have to follow each path until the last Raman pulse, which closes the interferometer. We denote  $\phi_{i \rightarrow j}^{(m)}$  the phase acquired by the atoms transferred from state  $|i\rangle$  to state  $|j\rangle$  by the  $m$ th Raman pulse. We also denote  $\phi_{i,P}^{(M)}$  the phase accumulated by a wave packet in state  $|i\rangle$  from path  $P$  during a free propagation phase  $M$ . With this notation, the phases of the two arms can be written

$$\phi_A = \phi_{1 \rightarrow 1}^{(1)} + \phi_{1,A}^{(1)} + \phi_{1 \rightarrow 2}^{(2)} + \phi_{2,A}^{(2)} + \phi_{2 \rightarrow 2}^{(3)} + \phi_{2,A}^{(3)}, \quad (31)$$

$$\phi_B = \phi_{1 \rightarrow 2}^{(1)} + \phi_{2,B}^{(1)} + \phi_{2 \rightarrow 2}^{(2)} + \phi_{2,B}^{(2)} + \phi_{2 \rightarrow 1}^{(3)} + \phi_{1,B}^{(3)}. \quad (32)$$

The terms corresponding to the Raman coupling are given using the expressions derived previously with the proportions of atoms at each step of the interferometer and for each cloud. At the end of the second Raman pulse, all the atoms in  $|1\rangle$  are pushed away. The mutual interaction terms from  $\phi_{2,A}^{(2)}$  and  $\phi_{2,B}^{(2)}$  depend on the number of atoms, given by  $\alpha(1-\alpha)N$ , where  $\alpha$  is the fraction of atoms transferred by the Raman transition. As the number of atoms at this stage is equal in the two paths,  $\phi_{2,A}^{(2)} = \phi_{2,B}^{(2)}$ , and these terms vanish from (31) and (32), leaving only the self-interaction terms. During the last free evolution, each cloud from path A or B interacts with two clouds in the opposite state. In its frame, one of them is going away, whereas the other one is coming closer. Thus, the

term accounting for the mutual interactions will be the sum of the two expressions, (25). Note that the last Raman pulse recombines the two paths, thus it does not contribute to the phase difference between the two arms of the interferometer. Atom-atom interactions during the last pulse contribute to a small variation in the number of atoms (see Fig. 3). Together with the expressions for  $\phi_A$  and  $\phi_B$ , one obtains the total phase difference between the two arms, at the end of the whole sequence,  $\Delta\phi = \phi_B - \phi_A$ .

Until now, we have assumed that the Raman pulses satisfy the condition  $\Omega\tau = \pi/2$ , leading to a 50/50 splitting of the clouds. Changing the duration of these pulses will thus result in a change in the number of atoms following each trajectory. Phases acquired during the pulses are relatively weak (see Fig. 1) but diverge when approaching the  $\pi$  condition. Then, as long as we take  $\tau$  so that the fraction  $\alpha$  of atoms performing the transition remains far from the limit  $\alpha \rightarrow 1$ , all the  $\phi_{i \rightarrow j}^{(m)}$  can be assumed to be negligible. Thus, one easily obtains an approximated expression depending only on  $\alpha$  for the total phase difference. It is given by

$$\Delta\phi = \left[ \omega_{11}(\alpha + 1)(\alpha - 1)^2 - \omega_{22}(2 - \alpha)\alpha^2 + \omega_{12} \frac{\sqrt{\pi}w}{4v_r T} (1 - 2\alpha)(2\alpha^2 - 2\alpha - 1) \right] T. \quad (33)$$

Figure 7 shows the contributions from each  $\omega_{ij}$  term to the total phase difference acquired between the paths at the end of the sequence of the interferometer, either using the complete expression determined from (31) and (32) or using (33). These

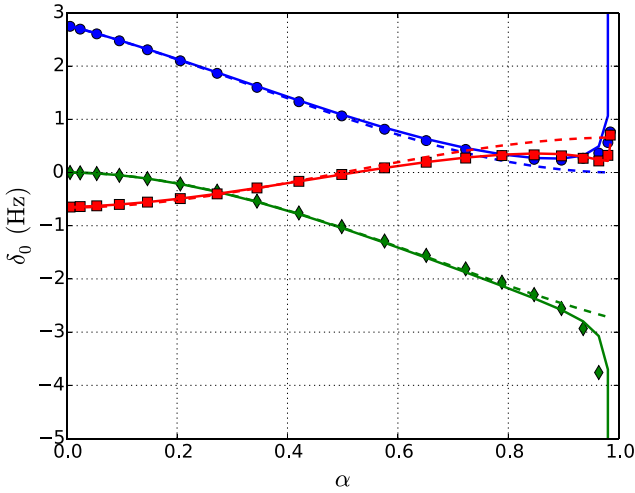


FIG. 7. (Color online) Position of the central fringe in the interference pattern of the complete sequence as a function of the fraction of atoms transferred from one state to another at the end of each Raman pulse. The effects of interaction have been isolated for  $\omega_{11}$  [(blue) circles], for  $\omega_{22}$  [(green) diamonds], and for  $\omega_{12}$  [(red) squares]. For each case, the full model corresponding to expressions (31) and (32) is represented as a solid line; the approximated expression, (36), as a dashed line; and simulations, as symbols. All results shown are obtained using the parameters  $N = 10^5$  atoms,  $w = 30 \mu\text{m}$ ,  $\tau = 0.5$  ms,  $T = 9.5$  ms,  $T' = 10.5$  ms, and  $\omega_{ij} \simeq 3$  Hz.

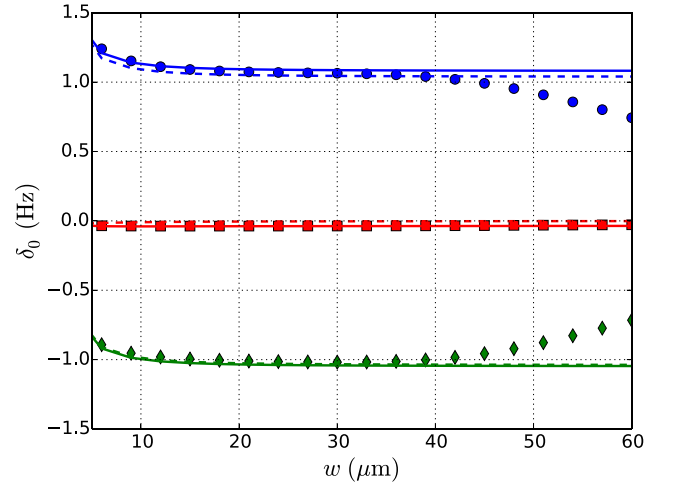


FIG. 8. (Color online) Position of the central fringe as a function of the spatial extension of the clouds. Again, each type of interaction has been isolated for  $\omega_{11}$  [(blue) circles], for  $\omega_{22}$  [(green) diamonds], and for  $\omega_{12}$  [(red) squares]. For each case, the full model corresponding to expressions (31) and (32) is represented as a solid line; the approximated expression, (33), using the value of  $\alpha$  given by (35), as a dashed line; and simulations, as symbols.

are also compared to the simulated results obtained solving the coupled GPE along the whole interferometer sequence. The complete calculation exhibits a good agreement with numerical results. We also observe as expected that as the efficiency of the pulses becomes close to 1, the contribution of the phases accumulated during the Raman pulses tends to prevail over that from free propagation phases.

Figure 8 shows the position of the central fringe for fixed values of  $\alpha = 0.5$  and mean-field frequencies  $\omega_{ij}$  of the order of 3 Hz and with  $\tau = 0.5$  ms,  $T = 9.5$  ms, and  $T' = 10.5$  ms. In order to keep these frequencies constant, the number of atoms scales in such a way that the density is constant. We can identify three regimes depending on the spatial extension  $w$  of the clouds. The first one corresponds to the case we have considered throughout the article, in which the spatial separation between the clouds at the end of the free propagation time  $T$  remains larger compared to the spatial extension of the clouds. It corresponds to the central portion of the curves in Fig. 8 where the total phase difference remains constant. The second regime is reached when  $T$  is too short for the wave packets to completely separate. In this limit, the model developed in this article does not apply anymore. Finally, a third regime is reached for low values of  $w$ . In this limit, the sharpness of the clouds translates into a larger spreading of the velocity distribution, leading to a reduced value of  $\alpha$  due to the Doppler effect. It can be deduced considering the velocity distribution of a Gaussian wave packet given by

$$P(w, v) = |\tilde{\Phi}(v, w)|^2 = \frac{mw}{\sqrt{2\pi}\hbar} \exp\left(-\left(\frac{mwv}{\sqrt{2}\hbar}\right)^2\right). \quad (34)$$

The expression for  $\alpha$  is then obtained using the probability of transition from  $|1\rangle$  to  $|2\rangle$  and yields

$$\alpha(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \delta^2} \sin^2\left(\sqrt{\Omega^2 + \delta^2} \frac{t}{2}\right) P(w, v), \quad (35)$$

with  $\Omega$  the Rabi frequency and  $\delta = 2m v_r v / \hbar$  the two-photon detuning.

In Fig. 8 we have plotted the phase shift calculated with Eq. (33) using the value of  $\alpha$  given by (35). This simple correction to Eq. (33) fits well with the GPE.

In the case of the Ramsey-Bordé atom interferometer, the main parameter to evaluate is the efficiency  $\alpha$  of each  $\pi/2$  pulse. When  $\alpha = 1/2$ , the effect of mutual interaction cancels. After each  $\pi/2$  pulse in the middle of the interferometer sequence atoms are eliminated from the interferometer, leading to a phase shift due to self-interaction. It equals  $3/8(\omega_{11} - \omega_{22}) \times T$  and it vanishes if  $\omega_{11} = \omega_{22}$ .

## V. THE MACH-ZEHNDER CONFIGURATION

Our model can be applied to determine the atom-atom interaction phase shift in a Mach-Zehnder atom interferometer based on a  $\{\pi/2 - \pi - \pi/2\}$  light-pulse sequence (see Fig. 9).

The phase shift depends on the transition probabilities  $\alpha$  and  $\beta$  induced, respectively, by  $\pi/2$  and  $\pi$  pulses:

$$\Delta\phi = \left[ \omega_{11}(1 - \alpha - \alpha\beta) - \omega_{22}(\beta - \alpha\beta - \alpha) + \omega_{12} \frac{\sqrt{\pi} w}{4v_r T} (4\alpha\beta - 2\beta) \right] T. \quad (36)$$

As opposed to the previous configuration, the phase shift is totally canceled if the transition probabilities  $\alpha$  and  $\beta$  are exactly 1/2 and 1.

However, up to now, we have not considered the expansion of the cloud that leads to a temporal variation of the mean field. This effect may be relevant in experiments with a large time of flight. Another point to consider is what happens if the efficiency  $\alpha$  deviates by  $\delta\alpha$  from 1/2.

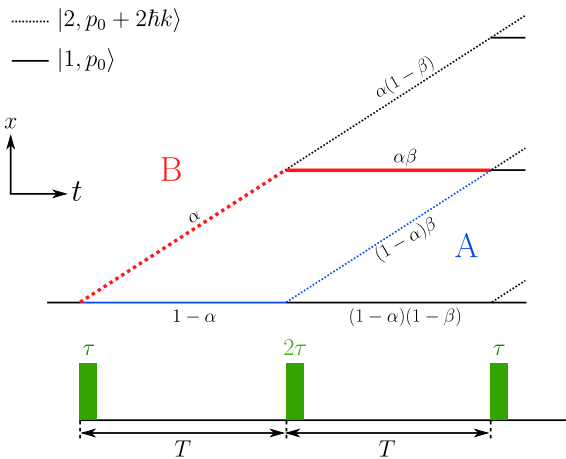


FIG. 9. (Color online) Trajectories of atom wave packets during the  $\pi/2 - \pi - \pi/2$  light-pulse interferometer. After each Raman pulse,  $\alpha N$  atoms are transferred to the other state. The two arms of the interferometer are defined by paths A [thin (blue) line] and B [thick (red) line]. The proportion of atoms in each cloud at each stage of the sequence is indicated.

TABLE I. Data from the Stanford 10-m atom interferometer;  $\Delta\Phi$  is calculated with  $\delta\alpha = \pm 1\%$ .

|               | Source I               | Source II              |
|---------------|------------------------|------------------------|
| $N$           | $4.10^6$ at            | $10^5$ at              |
| $\theta$      | 50 nK                  | 3 nK                   |
| $\bar{v}$     | 2.2 mm/s               | 0.54 mm/s              |
| $w$           | 400 $\mu\text{m}$      | 60 $\mu\text{m}$       |
| $\omega_{11}$ | 0.294 rad/s            | 2.176 rad/s            |
| $\omega_{22}$ | 0.278 rad/s            | 2.059 rad/s            |
| $\omega_{12}$ | 0.286 rad/s            | 2.117 rad/s            |
| $\Delta\Phi$  | $(1.43 \pm 1.08)$ mrad | $(6.50 \pm 4.72)$ mrad |

We calculate the residual phase shift taking into account the deviation  $\delta\alpha$  and the spread of the atomic cloud  $w(t)$ ,

$$w(t) = \sqrt{w_0^2 + (\bar{v}t)^2}, \quad (37)$$

where  $\bar{v}$  is the mean velocity of the atoms in the cloud ( $\sqrt{k_B \theta / m}$ ;  $k_B$  is the Boltzman constant,  $\theta$  the temperature of the cloud, and  $m$  the atomic mass). It is given by

$$\Delta\phi = (\omega_{22} - \omega_{11}) \left( \frac{w_0}{w(2T)} - \frac{w_0}{w(T)} \right) T - \left[ (\omega_{11} + \omega_{22}) \frac{2w_0}{w(2T)} - \omega_{12} \frac{\sqrt{\pi} w_0}{v_r T} \frac{w_0}{w(2T)} \right] T \delta\alpha. \quad (38)$$

We apply this formula using the experimental parameters of the Stanford 10-m atom interferometer currently in progress by the group of Kasevich [21]. The main purpose of this project is to test the equivalence principle to 1 part in  $10^{15}$  observing the free-fall dynamics of neutral atoms over several seconds. The duration of the interferometer  $2T$  is 2.3 ms.

In Table I we report the features of the two alternative atomic sources described in this reference, the corresponding mean-field pulsations  $\omega_{ij}$  and the phase shift accumulated over the interferometer for  $\delta\alpha = \pm 1\%$ .

For both atomic sources we have calculated the contribution of each term of Eq. (38). The main contribution comes from the first term: self-interactions during the spreading of the atomic clouds. It amounts to 1.4 mrad for source I and 6.5 mrad for source II. The term due to mutual interactions is negligible. The first term can be canceled by exchanging the direction of the Raman beams [22]. But if during this process the intensity of the laser pulse deviates in such a way that  $\delta\alpha = 1\%$ , it leads to a systematic effect on the measurement of gravity  $g$  of a few  $10^{-11}$ .

## VI. CONCLUSION

We have presented a theoretical model allowing us to calculate precisely the phase shift induced by atom-atom interactions in a light-pulse atom interferometer. This model is based on a perturbative approach, where we consider that the effect of the atom-atom interactions only induces a phase shift on the atomic wave function. We obtain results in good

TABLE II. Expressions of the matrix elements  $F_{ijkl}(t)$  and  $H_{ijkl}(t)$ .

| $kl$ | $F_{ijkl}(t)$      |                 |                  |                 |
|------|--------------------|-----------------|------------------|-----------------|
|      | $ij = 11$          | $ij = 12$       | $ij = 21$        | $ij = 22$       |
| 11   | $3yC + 3SC^2 + 2S$ | $yS + 3CS^2$    | $3yS + CS^2$     | $yC - S^3 - S$  |
| 12   | $yC - SC^2$        | $3yS - CS^2$    | $yS + CS^2$      | $3yC + SC^2$    |
| 22   | $3yC - SC^2 - 2S$  | $yS - CS^2$     | $3yS - 3CS^2$    | $yC + 3S^3 - S$ |
| $kl$ | $H_{ijkl}(t)$      |                 |                  |                 |
|      | $ij = 11$          | $ij = 12$       | $ij = 21$        | $ij = 22$       |
| 11   | $yS + 3CS^2$       | $yC + 3S^3 - S$ | $-yC + S^3 + S$  | $-yS + CS^2$    |
| 12   | $-yS - CS^2$       | $-yC + SC^2$    | $yC - SC^2$      | $yS + CS^2$     |
| 22   | $yS - CS^2$        | $yC - S^3 - S$  | $-yC - 3S^3 + S$ | $-yS - 3CS^2$   |

agreement with numerical resolution of the GPE. We show that the phase shift accumulated over the interferometer is mainly due to the variation in the number of atoms in each arm of the interferometer. We have investigated the contribution of several experimental parameters such as the efficiency of the Raman pulses or the spread of the atomic cloud. We have studied two light-pulse configurations:  $\{\pi/2-\pi/2\}-\{\pi/2-\pi/2\}$  (Ramsey-Bordé) and  $\pi/2-\pi-\pi/2$  (Mach-Zehnder). When the efficiency of the Raman pulse  $\alpha = 1/2$ , the phase shift over the Ramsey-Bordé interferometer equals  $3/8(\omega_{11} - \omega_{22})$ , where  $w_{ii}$  is the self mean-field pulsation averaged along the atomic wave packet. However, in the Mach-Zehnder interferometer, where the number of atoms remains constant in each arm, the phase shift is due to the spread of the interfering atomic clouds. The model described in this paper leads to precise and simple formulas of the phase shift due to atom-atom interactions as a function of the relevant experimental parameters. These formulas should be approved by experimental measurements. We have used the model to estimate the systematic effect due to atom-atom interactions in the 10-m Stanford interferometer. When the efficiency of the Raman pulse deviates by 1%, the systematic effect on the measurement of gravity  $g$  is of a few  $10^{-11}$ .

## ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by the Agence Nationale pour la Recherche, INAQED Project No. ANR-12-JS04-0009, and the *Emergence* program of the Université Pierre et Marie Curie.

## APPENDIX: PERTURBATION MATRIX ELEMENTS

Here we give the expressions for the functions  $F_{ijkl}$ ,  $G_{ijkl}$ , and  $H_{ijkl}$  that are used in the calculation of the  $\delta U_{ij}$  matrix elements from expression (18). First, as the interaction frequencies  $\omega_{12} = \omega_{21}$ , we can reduce the number of elements such that

$$F_{ijkl} = F_{ijlk}, \quad G_{ijkl} = G_{ijlk} \text{ and } H_{ijkl} = H_{ijlk}. \quad (\text{A1})$$

The elements also obey the rules

$$F_{ijkl} = G_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}\bar{l}} \quad \text{and} \quad H_{ijkl} = -H_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}\bar{l}}, \quad (\text{A2})$$

in which we denote by  $\bar{i}$  the state opposite  $i$  (e.g., if  $i = 1$ ,  $\bar{i} = 2$ ).

The elements of the  $F$  and  $H$  matrices are listed in Table II, where we have denoted

$$y = \frac{\Omega t}{2}, \quad C = \cos y, \quad \text{and} \quad S = \sin y. \quad (\text{A3})$$

- [1] S. Dimopoulos, P. W. Graham, J. M. Hogan, M. A. Kasevich, and S. Rajendran, *Phys. Lett. B* **678**, 37 (2009).
- [2] H. Müntinga, H. Ahlers, M. Krutzik, A. Wenzlawski, S. Arnold, D. Becker, K. Bongs, H. Dittus, H. Duncker, N. Gaaloul, C. Gherasim, E. Giese, C. Grzeschik, T. W. Hänsch, O. Hellmig, W. Herr, S. Herrmann, E. Kajari, S. Kleinert, C. Lämmerzahl, W. Lewoczko-Adamczyk, J. Malcolm, N. Meyer, R. Nolte, A. Peters, M. Popp, J. Reichel, A. Roura, J. Rudolph, M. Schiemangk, M. Schneider, S. T. Seidel, K. Sengstock, V. Tamma, T. Valenzuela, A. Vogel, R. Walser, T. Wendrich, P. Windpassinger, W. Zeller, T. van Zoest, W. Ertmer, W. P. Schleich, and E. M. Rasel, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 093602 (2013).
- [3] P. W. Graham, J. M. Hogan, M. A. Kasevich, and S. Rajendran, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 171102 (2013).
- [4] M. Kasevich and S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 181 (1991).
- [5] A. Peters, K. Y. Chung, and S. Chu, *Nature* **400**, 849 (1999).
- [6] R. Geiger, V. Menoret, G. Stern, N. Zahzam, P. Cheinet, B. Battelier, A. Villing, F. Moron, M. Lours, Y. Bidel, A. Bresson, A. Landragin, and P. Bouyer, *Nat. Commun.* **2**, 474 (2011).
- [7] K. Y. Chung, S. W. Chiow, S. Herrmann, S. Chu, and H. Müller, *Phys. Rev. D* **80**, 016002 (2009).
- [8] M. Andia, R. Jannin, F. Nez, F. Biraben, S. Guellati-Khélifa, and P. Cladé, *Phys. Rev. A* **88**, 031605 (2013).
- [9] J. B. Fixler, G. T. Foster, J. M. McGuirk, and M. A. Kasevich, *Science* **315**, 74 (2007).

- [10] G. Rosi, F. Sorrentino, L. Cacciapuoti, M. Prevedelli, and G. M. Tino, *Nature* **510**, 518 (2014).
- [11] R. Bouchendira, P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, F. Nez, and F. Biraben, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 080801 (2011).
- [12] R. Bouchendira, P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, F. Nez, and F. Biraben, *Ann. Phys.* **525**, 484 (2013).
- [13] H. Müller, S. W. Chiow, Q. Long, S. Herrmann, and S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 180405 (2008).
- [14] P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, F. Nez, and F. Biraben, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 240402 (2009).
- [15] S. W. Chiow, T. Kovachy, H. C. Chien, and M. A. Kasevich, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 130403 (2011).
- [16] G. D. McDonald, C. C. N. Kuhn, S. Bennetts, J. E. Debs, K. S. Hardman, M. Johnsson, J. D. Close, and N. P. Robins, *Phys. Rev. A* **88**, 053620 (2013).
- [17] A. Sugarbaker, S. M. Dickerson, J. M. Hogan, D. M. S. Johnson, and M. A. Kasevich, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 113002 (2013).
- [18] S. W. Chiow, T. Kovachy, J. M. Hogan, and M. A. Kasevich, *Opt. Lett.* **37**, 3861 (2012).
- [19] S. S. Sané, S. Bennetts, J. E. Debs, C. C. N. Kuhn, G. D. McDonald, P. A. Altin, J. D. Close, and N. P. Robins, *Opt. Express* **20**, 8915 (2012).
- [20] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, in *Atom-Photon Interactions* (Wiley-VCH Verlag, Weinheim, Germany, 2008), pp. 5–66.
- [21] S. M. Dickerson, J. M. Hogan, A. Sugarbaker, D. M. S. Johnson, and M. A. Kasevich, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 083001 (2013).
- [22] P. Cladé, E. de Mirandes, M. Cadoret, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, F. Nez, L. Julien, and F. Biraben, *Phys. Rev. A* **74**, 052109 (2006).





# Bibliographie

- [Ammann and Christensen, 1997] Ammann, H. and Christensen, N. (1997). Delta kick cooling : A new method for cooling atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 78 :2088–2091.
- [Anderson et al., 1995] Anderson, M. H., Ensher, J. R., Matthews, M. R., Wieman, C. E., and Cornell, E. A. (1995). Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor. *Science*, 269(5221) :198–201.
- [Anderson et al., 2009] Anderson, R. P., Ticknor, C., Sidorov, A. I., and Hall, B. V. (2009). Spatially inhomogeneous phase evolution of a two-component Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 80 :023603.
- [Andia, 2015] Andia, M. (2015). *Oscillations de Bloch d’atomes ultra-froids : Application aux mesures de haute précision*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI.
- [Andia et al., 2013] Andia, M., Jannin, R., Nez, F., Biraben, F., Guellati-Khélifa, S., and Cladé, P. (2013). Compact atomic gravimeter based on a pulsed and accelerated optical lattice. *Phys. Rev. A*, 88 :031605.
- [Ando et al., 2011] Ando, T., Ohtake, Y., Kondo, J.-i., and Nakamura, K. (2011). Effects of nonlinearity on the optical diffraction of Bose-Einstein condensates : Direct integration of optically coupled multicomponent Gross-Pitaevskii equation. *Phys. Rev. A*, 83 :023619.
- [Aoyama et al., 2012] Aoyama, T., Hayakawa, M., Kinoshita, T., and Nio, M. (2012). Tenth-Order QED Contribution to the Electron  $g-2$  and an Improved Value of the Fine Structure Constant. *Phys. Rev. Lett.*, 109 :111807.
- [Ballagh et al., 1997] Ballagh, R. J., Burnett, K., and Scott, T. F. (1997). Theory of an Output Coupler for Bose-Einstein Condensed Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 78 :1607–1611.



- [Black, 2001] Black, E. D. (2001). An introduction to Pound–Drever–Hall laser frequency stabilization. *American Journal of Physics*, 69(1) :79–87.
- [Bordé, 1989] Bordé, C. J. (1989). Atomic interferometry with internal state labelling. *Physics Letters A*, 140 :10–12.
- [Bouchendira, 2012] Bouchendira, R. (2012). *Mesure de l’effet de recul de l’atome de rubidium par interférométrie atomique : nouvelle détermination de la constante de structure fine pour tester l’électrodynamique quantique*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI.
- [Bouchendira et al., 2011] Bouchendira, R., Cladé, P., Guellati-Khélifa, S., Nez, F. m. c., and Biraben, F. m. c. (2011). New determination of the fine structure constant and test of the quantum electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 106 :080801.
- [Chiou et al., 2011] Chiow, S.-w., Kovachy, T., Chien, H.-C., and Kasevich, M. A. (2011).  $102\hbar k$  large area atom interferometers. *Phys. Rev. Lett.*, 107 :130403.
- [Chiou et al., 2012] Chiow, S.-w., Kovachy, T., Hogan, J. M., and Kasevich, M. A. (2012). Generation of 43 W of quasi-continuous 780 nm laser light via high-efficiency, single-pass frequency doubling in periodically poled lithium niobate crystals. *Opt. Lett.*, 37(18) :3861–3863.
- [Cladé et al., 2009] Cladé, P., Guellati-Khélifa, S., Nez, F., and Biraben, F. (2009). Large Momentum Beam Splitter Using Bloch Oscillations. *Phys. Rev. Lett.*, 102 :240402.
- [Cohen-Tannoudji, 1997] Cohen-Tannoudji, C. (1996-1997). Atomes ultrafroids - Piégeage non dissipatif et refroidissement évaporatif. Cours du Collège de France.
- [Cohen-Tannoudji et al., 2001] Cohen-Tannoudji, C., Dupont-Roc, J., and Grynberg, G. (2001). *Processus d’interactions entre photons et atomes*. CNRS Editions/EDP Sciences.
- [Cohen-Tannoudji and Guéry-Odelin, 2011] Cohen-Tannoudji, C. and Guéry-Odelin, D. (2011). *Advances in Atomic Physics*. World Scientific.
- [Couvert, 2009] Couvert, A. (2009). *Production and study of guided atom lasers, and of their interaction with controlled defects*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI.

- [Dalfovo et al., 1999] Dalfovo, F., Giorgini, S., Pitaevskii, L. P., and Stringari, S. (1999). Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.*, 71 :463–512.
- [Dalibard, 2008] Dalibard, J. (2008). Atomes ultra-froids, notes de cours.
- [Davis et al., 1995] Davis, K., Mewes, M.-O., and Ketterle, W. (1995). An analytical model for evaporative cooling of atoms. *Applied Physics B*, 60(2-3) :155–159.
- [De Beauvoir, 1996] De Beauvoir, B. (1996). *Réalisation d'un étalon de fréquence à 778 nm : mesure absolue des fréquences 2S-8S/D des atomes d'hydrogène et de deutérium et détermination de la constante de Rydberg*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI.
- [Dickerson et al., 2013] Dickerson, S. M., Hogan, J. M., Sugarbaker, A., Johnson, D. M. S., and Kasevich, M. A. (2013). Multiaxis Inertial Sensing with Long-Time Point Source Atom Interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 111 :083001.
- [Dimopoulos et al., 2009] Dimopoulos, S., Graham, P. W., Hogan, J. M., Kasevich, M. A., and Rajendran, S. (2009). Gravitational wave detection with atom interferometry. *Physics Letters B*, 678(1) :37 – 40.
- [Fray et al., 2004] Fray, S., Diez, C. A., Hänsch, T. W., and Weitz, M. (2004). Atomic interferometer with amplitude gratings of light and its applications to atom based tests of the equivalence principle. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :240404.
- [Gaaloul et al., 2014] Gaaloul, N., Hartwig, J., Schubert, C., Ertmer, W., and Rasel, E. M. (2014). Precision interferometry with Bose-Einstein condensates. In *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Volume 188 : Atom Interferometry*, pages 657 – 689. IOS Press/SIF.
- [Galtier, 2014] Galtier, S. (2014). *High precision spectroscopy of the 1S-3S transition of hydrogen to determine the proton radius*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI.
- [Graham et al., 2013] Graham, P. W., Hogan, J. M., Kasevich, M. A., and Rajendran, S. (2013). New method for gravitational wave detection with atomic sensors. *Phys. Rev. Lett.*, 110 :171102.
- [Grimm et al., 2000] Grimm, R., Weidemüller, M., and Ovchinnikov, Y. B. (2000). Optical dipole traps for neutral atoms. volume 42 of *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, pages 95 – 170. Academic Press.

- [Kasevich and Chu, 1992] Kasevich, M. and Chu, S. (1992). Measurement of the gravitational acceleration of an atom with a light-pulse atom interferometer. *Applied Physics B*, 54(5) :321–332.
- [Keith et al., 1991] Keith, D. W., Ekstrom, C. R., Turchette, Q. A., and Pritchard, D. E. (1991). An interferometer for atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 66 :2693–2696.
- [Kuhn et al., 2014] Kuhn, C. C. N., McDonald, G. D., Hardman, K. S., Bennetts, S., Everitt, P. J., Altin, P. A., Debs, J. E., Close, J. D., and Robins, N. P. (2014). A Bose-condensed, simultaneous dual-species Mach-Zehnder atom interferometer. *New Journal of Physics*, 16(7) :073035.
- [Kusch and Foley, 1948] Kusch, P. and Foley, H. M. (1948). The magnetic moment of the electron. *Phys. Rev.*, 74 :250–263.
- [Malossi et al., 2010] Malossi, N., Bodart, Q., Merlet, S., Lévêque, T., Landragin, A., and Santos, F. P. D. (2010). Double diffraction in an atomic gravimeter. *Phys. Rev. A*, 81 :013617.
- [Marton, 1952] Marton, L. (1952). Electron interferometer. *Phys. Rev.*, 85 :1057–1058.
- [McDonald et al., 2013] McDonald, G. D., Kuhn, C. C. N., Bennetts, S., Debs, J. E., Hardman, K. S., Johnsson, M., Close, J. D., and Robins, N. P. (2013).  $80\hbar k$  momentum separation with bloch oscillations in an optically guided atom interferometer. *Phys. Rev. A*, 88 :053620.
- [McGuirk et al., 2002] McGuirk, J. M., Foster, G. T., Fixler, J. B., Snadden, M. J., and Kasevich, M. A. (2002). Sensitive absolute-gravity gradiometry using atom interferometry. *Phys. Rev. A*, 65 :033608.
- [McGuirk et al., 2000] McGuirk, J. M., Snadden, M. J., and Kasevich, M. A. (2000). Large area light-pulse atom interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :4498–4501.
- [Moler et al., 1992] Moler, K., Weiss, D. S., Kasevich, M., and Chu, S. (1992). Theoretical analysis of velocity-selective Raman transitions. *Phys. Rev. A*, 45 :342–348.
- [Monroe et al., 1990] Monroe, C., Swann, W., Robinson, H., and Wieman, C. (1990). Very cold trapped atoms in a vapor cell. *Phys. Rev. Lett.*, 65 :1571–1574.

- [Müller et al., 2008] Müller, H., Chiow, S.-W., Long, Q., Herrmann, S., and Chu, S. (2008). Atom interferometry with up to 24-photon-momentum-transfer beam splitters. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :180405.
- [Müntinga et al., 2013] Müntinga, H., Ahlers, H., Krutzik, M., Wenzlawski, A., Arnold, S., Becker, D., Bongs, K., Dittus, H., Duncker, H., Gaaloul, N., Gherasim, C., Giese, E., Grzeschik, C., Hänsch, T. W., Hellmig, O., Herr, W., Herrmann, S., Kajari, E., Kleinert, S., Lämmerzahl, C., Lewoczko-Adamczyk, W., Malcolm, J., Meyer, N., Nolte, R., Peters, A., Popp, M., Reichel, J., Roura, A., Rudolph, J., Schiemangk, M., Schneider, M., Seidel, S. T., Sengstock, K., Tamma, V., Valenzuela, T., Vogel, A., Walser, R., Wendrich, T., Windpassinger, P., Zeller, W., van Zoest, T., Ertmer, W., Schleich, W. P., and Rasel, E. M. (2013). Interferometry with Bose-Einstein Condensates in Microgravity. *Phys. Rev. Lett.*, 110 :093602.
- [O’Hara et al., 2001] O’Hara, K. M., Gehm, M. E., Granade, S. R., and Thomas, J. E. (2001). Scaling laws for evaporative cooling in time-dependent optical traps. *Phys. Rev. A*, 64 :051403.
- [Perrin, 1998] Perrin, H. (1998). *Refroidissement d’atomes de césium confinés dans un piège dipolaire très désaccordé*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI.
- [Peters et al., 2001] Peters, A., Chung, K. Y., and Chu, S. (2001). High-precision gravity measurements using atom interferometry. *Metrologia*, 38(1) :25.
- [Pilati et al., 2008] Pilati, S., Giorgini, S., and Prokof’ev, N. (2008). Critical Temperature of Interacting Bose Gases in Two and Three Dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :140405.
- [Rauch et al., 1974] Rauch, H., Treimer, W., and Bonse, U. (1974). Test of a single crystal neutron interferometer. *Physics Letters A*, 47(5) :369 – 371.
- [Rosi et al., 2014] Rosi, G., Sorrentino, F., Cacciapuoti, L., Prevedelli, M., and Tino, G. M. (2014). Precision measurement of the Newtonian gravitational constant using cold atoms. *Nature*, 510 :518 – 521.
- [Sané et al., 2012] Sané, S. S., Bennetts, S., Debs, J. E., Kuhn, C. C. N., McDonald, G. D., Altin, P. A., Close, J. D., and Robins, N. P. (2012). 11 W narrow linewidth laser source at 780nm for laser cooling and manipulation of Rubidium. *Opt. Express*, 20(8) :8915–8919.

- [Schlamminger et al., 2008] Schlamminger, S., Choi, K.-Y., Wagner, T. A., Gundlach, J. H., and Adelberger, E. G. (2008). Test of the equivalence principle using a rotating torsion balance. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :041101.
- [Schlippert et al., 2014] Schlippert, D., Hartwig, J., Albers, H., Richardson, L. L., Schubert, C., Roura, A., Schleich, W. P., Ertmer, W., and Rasel, E. M. (2014). Quantum test of the universality of free fall. *Phys. Rev. Lett.*, 112 :203002.
- [Schwinger, 1948] Schwinger, J. (1948). On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron. *Phys. Rev.*, 73 :416–417.
- [Steck, 2008] Steck, D. A. (2008). Rubidium 87 D line data.
- [Storey and Cohen-Tannoudji, 1994] Storey, P. and Cohen-Tannoudji, C. (1994). The Feynman path integral approach to atomic interferometry. A tutorial. *Journal de Physique II*, 4(11) :1999–2027.
- [Sugarbaker, 2014] Sugarbaker, A. (2014). *Atom interferometry in a 10 m fountain*. PhD thesis, Stanford University.
- [Sugarbaker et al., 2013] Sugarbaker, A., Dickerson, S. M., Hogan, J. M., Johnson, D. M. S., and Kasevich, M. A. (2013). Enhanced atom interferometer readout through the application of phase shear. *Phys. Rev. Lett.*, 111 :113002.
- [Suzuki, 1990] Suzuki, M. (1990). Fractal decomposition of exponential operators with applications to many-body theories and Monte Carlo simulations. *Physics Letters A*, 146(6) :319 – 323.
- [Tarallo et al., 2014] Tarallo, M. G., Mazzoni, T., Poli, N., Sutyrin, D. V., Zhang, X., and Tino, G. M. (2014). Test of Einstein Equivalence Principle for 0-Spin and Half-Integer-Spin Atoms : Search for Spin-Gravity Coupling Effects. *Phys. Rev. Lett.*, 113 :023005.
- [Weiss et al., 1993] Weiss, D. S., Young, B. C., and Chu, S. (1993). Precision measurement of the photon recoil of an atom using atomic interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 70 :2706–2709.



---

## Sujet : Interférométrie atomique avec un condensat de Bose-Einstein : effet des interactions internes

---

**Résumé :** Le travail réalisé dans le cadre de cette thèse s'articule en deux volets. Le premier porte sur l'étude de l'effet des interactions entre atomes au sein d'un interféromètre atomique, dont la source est un condensat de Bose-Einstein. Nous présentons un modèle analytique permettant d'obtenir des expressions simples pour le déphasage induit par celles-ci. Ce modèle est comparé à des simulations numériques résolvant les équations de Gross-Pitaevskii couplées, et présente un excellent accord. Le second concerne la conception et la construction d'un nouveau dispositif expérimental visant à obtenir un condensat de Bose-Einstein dans le but de réaliser des mesures de haute précision par interférométrie atomique.

**Mots clés :** Interférométrie atomique, Condensation de Bose-Einstein, Piège dipolaire optique, Equation de Gross-Pitaevskii, Interactions entre atomes.

---

## Subject : Atom interferometry with a Bose-Einstein condensate: Effect of internal interactions

---

**Abstract :** The work performed during this thesis comprises two orientations. The first one is the study of the effect of interactions between atoms in an atom interferometer which source of atoms is a Bose-Einstein condensate. We present an analytical model allowing to obtain simple expressions for the phase shift induced by them. This model is compared to numerical simulations solving the coupled Gross-Pitaevskii equations and presents a good agreement. The second one is the design and construction of a new experimental set-up for the production of a Bose-Einstein condensate to perform high precision measurements with the use of atom interferometry.

**Keywords :** Atom interferometry, Bose-Einstein condensation, Optical dipolar trap, Gross-Pitaevskii equation, Atom-atom interactions.